# PHYSIKALISCHE ZEITSCHRIFT

No. 5. 1. März 1914. Redaktionsschluß für No. 6 am 28. Februar 1914. 15. Jahrgang.


INHALT:


**Originalmitteilungen:**

W. H. Keesom, Über die Frage, ob sich im absoluten Nullpunkt die Entropie beim Mischen ändert. S. 217.

L. Mandelstam, Strahlung einer Lichtquelle, die sich sehr nahe an der Trennungsfläche zweier durchsichtiger Medien befindet. S. 220.

K. Försterling, Lichtfortpflanzung in inhomogenen Medien. (Theorie der Lippmannschen Farbenphotographie.) II. S. 225.

P. Selényi, Elementare Theorie des Faradayschen Effektes. S. 234.

O. Hahn u. L. Meitner, Über das Uran *Y*. S. 236.

L. Bruner u. E. Bekier, Versuche über die Wirkung elektrischer Entladungen in Helium auf Radiumemanation. S. 240.

R. Holm, Zur Theorie des Glimmstroms. I. S. 241.

J. v. Kowalski, Elektrodenlose Ringentladung in Quecksilberdämpfen. S. 249.

Th. Wulf, Ein Einfadenelektrometer. S. 250.

G. Schulze u. R. Lindemann, Über den Einfluß der elektrostatischen Kapazität und der Mindestspannung der elektrolytischen Ventile auf ihr Verhalten gegen Wechselstrom. S. 254.

**Physikalische Technik:**

F. Ewald, Hochvakuum-Meßapparat aus Glas. S. 260.

**Besprechungen:**

E. Gerland, Geschichte der Physik von den ältesten Zeiten bis zum Ausgange des achtzehnten Jahrhunderts. S. 261.

E. Rutherford, Radioaktive Substanzen und ihre Strahlungen. S. 261.

M. Centnerszwer, Das Radium und die Radioaktivität. S. 262.

L. Cassuto, Der kolloide Zustand der Materie. S. 262.

Sv. Oden, Der kolloide Schwefel. S. 263.

M. Speter, Die chemische Verwandtschaft und ihre Beziehungen zu den übrigen Energieformen. S. 263.

**Berichtigungen.** S. 263.

**Tagesereignisse.** S. 264.

**Personalien.** S. 264.

**Angebote.** S. 264.

**Gesuche.** S. 264.


## ORIGINALMITTEILUNGEN.

### Über die Frage, ob sich im absoluten Nullpunkt die Entropie beim Mischen ändert. (On the question whether at the absolute zero entropy changes on mixing.)


Von W. H. Keesom.


§ 1. Die Formel für die Entropie des „Grammmoleküls“ eines Gemisches idealer, nicht reagierender Gase, für deren jedes die Gleichung

$$pV = RT$$

gilt, enthält den Ausdruck

$$-R\Sigma c_1 \log \text{nat}\, c_1 . \qquad (1)$$

In diesem Ausdruck bedeutet $c_1$ die im Grammmolekül des Gemisches vorhandene Anzahl von Grammolekülen der ersten Komponente, $c_2$ die entsprechende Anzahl der zweiten, usf. $\Sigma$ soll in dieser Arbeit eine Summation über die verschiedenen Komponenten bezeichnen.

Der Ausdruck (1) geht unverändert in die Formel für die Entropie des Gemisches über, wenn dieses aus dem Zustande eines idealen Gases, wie wir ihn oben betrachtet haben, in andere Zustände übergeführt wird.

Nach der Planckschen Fassung des Nernstschen Wärmetheorems nähert sich bei Annäherung der absoluten Temperatur an o die Entropie einer einkomponentigen Substanz in kondensiertem Zustande einem endlichen Werte, der vom Druck und von dem besonderen Aggregatzustande unabhängig ist. Dieser Wert kann als passender Nullpunkt für die Entropie jener Substanz im kondensierten Zustande angenommen werden.

Da es nicht ohne weiteres klar ist, wie bei Annäherung an $T = o$ die übrigen in dem Ausdruck für die Entropie eines Gemisches auftretenden Glieder einen Ausgleich für das oben verzeichnete Glied liefern können, so könnte man sich denken, daß bei Annäherung an $T = o$ die Entropie für ein Gemisch nicht o werden könnte, trotzdem dies für die Komponenten der Fall ist.

In solchem Falle würde indessen bei einer Temperatur, die wenig vom absoluten Nullpunkt abweicht, jede reversible isotherme Änderung der Komponenten im kondensierten Zustande einzeln mit einer Wärmeentwicklung oder einer Wärmeabsorption verbunden sein, die sich dem Werte o rascher näherte als die Temperatur. Die reversible Mischung jener Komponenten dagegen würde von einer Wärmewirkung begleitet sein, die sich dem Werte o ebenso schnell nähert wie die Temperatur (oder gelegentlich langsamer als diese). Mit anderen Worten: die Mischungswärme würde von anderer Größenordnung sein als die Wärme jedes einzelnen mit den einzelnen Komponenten vorgenommenen reversiblen isothermen Prozesses.

Es scheint mir natürlicher, anzunehmen, daß auch für ein Gemisch die Entropie in dem absoluten Nullpunkt gleich o ist, falls dies für die Komponenten der Fall ist, indem man diesen Punkt zum Nullpunkt für die betreffenden Entropien wählt[1]).

1) Anmerkung zu dieser Übersetzung: Der Inhalt dieses Aufsatzes wurde von mir am 12. Dez. 1913 in der Sitzung der naturwissenschaftlichen Abteilung der „Genootschap ter bevordering van Natuur-, Genees- en

Wahrscheinlich findet sogar der oben erwähnte Ausgleich bereits im idealen Gaszustande statt, wenigstens dann, wenn das Volumen des Gemisches nicht allzu schnell auf $\infty$ wächst, während die Temperatur auf o abnimmt.

Im Einklang mit einer Notiz von Nernst[1]) sind wir praktisch zu der Annahme gezwungen, daß für die translatorische Molekülarbewegung eines Gases bei der Annäherung an $T = o$ schließlich die Äquipartitionsgesetze nicht mehr gelten. Für die Bestimmung der Temperatur kann man sich dann nicht mehr auf das Gasthermometer verlassen. Ein Verfahren zur Temperaturbestimmung, das dann theoretisch geeignet ist, besteht darin, daß man die Temperatur aus der Energiedichte der Strahlung ableitet, die mit der Molekularbewegung im Gas im Gleichgewicht steht.

Wir wollen das Gleichgewicht zwischen der translatorischen Molekularbewegung des Gases und der Strahlung nacheinander bei zwei Temperaturen, $T$ und $T + dT$, betrachten. Die nächstliegende Annahme ist die, daß einer Zunahme der Energiedichte des Gases eine Zunahme der Energiedichte der Strahlung entspricht, die zu ersterer in einem endlichen Verhältnis steht; mit anderen Worten, daß

$$dU = \gamma T^3 dT \qquad (2)$$

ist, wo $\gamma$ einen endlichen, und bei genügend tiefer Temperatur einen konstanten Wert hat. In dieser Gleichung mag $U$ die Energie des Grammoleküls des Gases darstellen. Es wird angenommen, daß das Molekularvolumen bei Annäherung an $T = o$ nicht $\infty$ wird.

Aus (2) folgt, daß[2]) für $T = o$

$$\left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V = o \qquad (3)$$

ist.

Die Gleichung (2) hat dieselbe Form wie die entsprechende Beziehung für einen festen Körper. In der Tat könnte man kaum annehmen, daß das Gleichgewicht zwischen der Molekularbewegung der Gasmoleküle beim Anprall gegen einen festen Körper und der Strahlung durch ein ganz anderes Gesetz bestimmt werden würde als das Gleichgewicht zwischen der Molekularbewegung in einem festen Körper und der Strahlung.

Aus der Gleichung (2) und der Beziehung

$$p = \frac{2U}{3V}, \qquad (4)$$

die gültig bleibt, folgt für $T = o$:

$$\left.\begin{aligned}\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V &= o,\\ \left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T &= o,\end{aligned}\right| \qquad (5)$$

mithin:

wo $S$ die Entropie darstellt.

Wenn wir nunmehr die Entropieänderung berechnen, die bei der Mischung zweier idealer Gase eintritt (d. h. solcher Gase, in deren Zustandsgleichung keine Glieder auftreten, die vom Volumen und von der gegenseitigen Anziehung der Moleküle abhängen), indem wir annehmen, daß diese Mischung auf reversiblem Wege bei konstanter Temperatur stattfindet, so folgt aus der letztgenannten Beziehung, daß in dem absoluten Nullpunkt die Entropieänderung beim Mischen gleich o ist.

**§ 2.** Das im vorigen Paragraphen angegebene Theorem läßt sich mit Hilfe von Beziehungen für die Zustandsgleichung eines idealen Gases weiter aufklären, die ich an anderer Stelle[1]) abgeleitet habe. Es erschien mir indessen erwünscht, zur Begründung der Betrachtungen des **§ 1** nicht mehr Annahmen zu machen, als streng erforderlich sind. Es lassen sich nämlich gegen mehrere der speziellen Annahmen, die ich an der genannten Stelle gemacht habe, insbesondere gegen die Anwendung der Methode von Debye, wie sie dort auf ein ideales Gas gemacht worden ist, mehr oder minder ernste Einwände erheben. Immerhin werden die Abweichungen von den Äquipartitionsgesetzen, die sich in der Zustandsgleichung eines idealen einatomigen Gases zeigen werden, durch jene Beziehungen in qualitativer Hinsicht vermutlich richtig angegeben. Ferner glaube ich, daß man mit einiger Zuversicht erwarten darf, daß die Größenordnung jener Abweichungen mit der Größenordnung der Abweichungen übereinstimmen wird, wie sie durch die erwähnten Beziehungen gegeben wird. Aus diesem Grunde scheint es mir nicht ganz überflüssig zu sein, hier anzugeben, was man für die Entropie eines

Heelkunde" zu Amsterdam vorgetragen. Nachdem dieser Aufsatz der Amsterdamer Akademie eingereicht und schon in englischer Übersetzung abgedruckt war, kam zu meiner Kenntnis, daß der Satz, daß das Nernstsche Wärmetheorem auch auf feste Lösungen, isomorphe Mischungen u. dgl. anwendbar ist, von Nernst in der Sitzung der Berliner Akademie vom 11. Dezember unzweideutig ausgesprochen worden war.

1) W. Nernst, diese Zeitschr. **13**, 1066, 1912. Vgl. auch H. Kamerlingh Onnes und W. H. Keesom, Enzykl. Mathem. 5, 10; Leiden Comm. Suppl. Nr. 23, Fußnote 517.

2) Es sei bemerkt, daß für die Gültigkeit der Gleichung (3) eine mit $T^3$ proportionale Abnahme von $\left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V$, wie sie durch Gleichung (2) angegeben wird, nicht erforderlich ist, sondern daß eine Abnahme proportional mit $T$ genügen würde.

1) Leiden Comm., Suppl. Nr. 30a, Mai 1913; diese Zeitschr. **14**, 665, 1913.

idealen Gemisches aus jenen Beziehungen ableiten kann.

**a)** Aus der Gleichung (1) meiner Arbeit[1]) im Verein mit den Gleichungen (2), (3) und (5) jener Arbeit folgt für ein Gas mit einer Komponente, wenn man molekulare Rotationen und intermolekulare Bewegungen unberücksichtigt läßt[2]),

$$S = \frac{9N}{\nu_{\max}^3}\int_0^{\nu_{\max}}\left\{\frac{1}{T}\,\frac{h\nu}{e^{\frac{h\nu}{kT}}-1} - \right. \\ \left. - \log\text{nat}\left(1-e^{-\frac{h\nu}{kT}}\right)\right\}\nu^2\,d\nu. \qquad (6)$$

Setzt man

$$\xi = \frac{h\nu}{kT} \qquad \text{und} \qquad x = \frac{h\nu_{\max}}{kT}, \qquad (7)$$

und integriert man partiell über das zweite Glied unter dem Integralzeichen, so geht die Gleichung (6) in

$$S = 3Nk\left\{\frac{4}{x^3}\int_0^x \frac{\xi^3\,d\xi}{e^\xi - 1} - \log\text{nat}\,(1-e^{-x})\right\} \qquad (8)$$

über.

Das ergibt für große Werte von $x$:

$$S = 3Nk\left\{\frac{4\pi^4}{15}\,\frac{1}{x^3} - 3x\sum_{n=1}^{n=\infty} e^{-nx}\left(\frac{1}{nx} + \right.\right. \\ \left.\left. + \frac{4}{n^2x^2} + \frac{8}{n^3x^3} + \frac{8}{n^4x^4}\right)\right\} \qquad (9)$$

und für kleine Werte von $x$:

$$S = -3Nk\left[\log\text{nat}\,(1-e^{-x}) - \right. \\ \left. - \frac{4}{3}\left\{1 - \frac{3}{8}x + \frac{3}{5}\,\frac{B_1}{2!}x^2 - \frac{3}{7}\,\frac{B_2}{4!}x^4 + \ldots\right\}\right], \qquad (10)$$

wo $B_1$, $B_2$ ... die Bernouillischen Koeffizienten bezeichnen.

***a)*** Tiefe Temperaturen. Wenn wir von der Entwicklung (9) nur das erste Glied schreiben, können wir

$$x = \frac{\Theta_0}{T}$$

setzen, wo $\Theta_0$ durch die Gleichung (18a) oder (18b) meiner mehrfach genannten Arbeit[3]) gegeben ist. Das ergibt:

$$S = \alpha M^3 V^2 T^3, \qquad (11)$$

wenn $M$ das Molekulargewicht bezeichnet und $\alpha$ eine Konstante, die von den Planckschen Konstanten $h$ und $k$ und von der Avogadroschen Konstante abhängig ist.

Nach Gleichung (11) nähert sich bei konstant gehaltenem Volumen die Entropie dem Werte o für $T = o$. Sie nähert sich ihm proportional mit $T^3$, was mit Gleichung (2) im Einklang steht. Letzteres würde nicht der Fall gewesen sein, wenn die Nullpunktsenergie[1]) nicht in die Theorie eingeführt worden wäre[2]).

***β)*** Hohe Temperaturen. Behält man in der Entwicklung für hohe Temperaturen nur das erste Glied bei, das eine Abweichung von den Äquipartitionsgesetzen ergibt, so erhält man

$$S = -\frac{3Nk}{2}\log\text{nat}\,\frac{8}{3}\,\frac{\Theta_0}{T} + 4Nk + \\ + \frac{16Nk}{1575}\,\frac{\Theta_0^2}{T^2}, \qquad (13)$$

oder

$$S = Nk\left\{\frac{3}{2}\log\text{nat}\,\beta M\,T\,V^{\frac{1}{3}} + 4 + \right. \\ \left. + \frac{1}{700}\,(\beta M\,T\,V^{\frac{1}{3}})^{-2}\right\}, \qquad (14)$$

wo $\beta$ eine von $h$, $k$ und $N$ abhängige Konstante ist.

Die additive Konstante $Nk\left(4 + \frac{3}{2}\log\text{nat}\,\beta M\right)$, mit der die „chemische Konstante" zusammenhängt, stimmt mit dem Ausdruck überein, den Tetrode[3]) ohne die Annahme einer Nullpunktsenergie erhalten hat.

**b)** Aus den Gleichungen (11) und (14) können wir, wenn wir wiederum molekulare Rotationen und intramolekulare Bewegungen unberücksichtigt lassen, die Entropie der molekularen Menge eines idealen Gases leicht ableiten, wenn wir annehmen, daß das Gibbssche Theorem gültig bleibt, auch wenn die Äquipartitionsgesetze nicht mehr gelten. Nach diesem Theorem erhält man die Entropie eines solchen Gemisches, wenn man die Entropie für jede einzelne Komponente so berechnet, als ob sie für sich allein in dem Volumen vorhanden wäre, das von dem Gemische eingenommen wird, und die so erhaltenen Werte addiert. Auf diese Weise erhalten wir:

***α)*** für tiefe Temperaturen:

$$S = \alpha T^3 V^2 \sum \frac{M_1^3}{c_1}, \qquad (16)$$

1) Diese Zeitschr. **14**, 667, 1913.
2) Dieser Ausdruck ist bereits von H. Tetrode angegeben worden. Siehe diese Zeitschr. **14**, 212, 1913.
3) Diese Zeitschr. **14**, 669, 1913.

1) Siehe a. a. O., § 4, c.
2) Vgl. H. Tetrode, diese Zeitschr. **14**, 214, 1913.
3) H. Tetrode, a. a. O.

$\beta$) für hohe Temperaturen, unter Beibehaltung des ersten Gliedes, das eine Abweichung von den Äquipartitionsgesetzen ergibt,

$$S = Nk\left\{\frac{3}{2}\log\text{nat}\,\beta T V^{\frac{2}{3}} + \frac{3}{2}\sum c_1 \cdot \log\text{nat}\,M_1 - \sum c_1 \log\text{nat}\,c_1 + 4 + \frac{1}{700}(\beta T V^{\frac{2}{3}})^{-2}\cdot\sum c_1 M_1^{\frac{2}{3}}\right\}. \quad (17)$$

Wenn bei konstantem Volumen die Temperatur kontinuierlich abnimmt, beginnt sich bei hinreichend niedrigen Temperaturen [für Dichten von der Größenordnung der normalen Dichte bei äußerst tiefen Temperaturen[1])] eine positive Abweichung vom Äquipartitionswert auszubilden. Diese Abweichung bewirkt, daß in einem Gemisch schließlich auch die Entropie, wie Gleichung (16) lehrt, statt $-\infty$ zu werden, sich proportional mit $T^3$ dem Werte 0 nähert.

1) Vgl. a. a. O., § 5, b.

(Nach Korrekturbogen von Amsterdam Proc. aus dem Englischen übersetzt von Max Iklé.)

Leiden, Dezember 1913.

(Eingegangen 27. Januar 1914.)

## Strahlung einer Lichtquelle, die sich sehr nahe an der Trennungsfläche zweier durchsichtiger Medien befindet[1]).

Von L. Mandelstam.

§ 1. Die im folgenden beschriebenen Versuche betreffen eine Erscheinung, welche eintritt, wenn eine Lichtquelle sich sehr nahe an der Grenzfläche zweier durchsichtigen Körper befindet, und von welcher die gewöhnlichen Brechungsgesetze keine Rechenschaft geben. Sie besteht im folgenden. Denken wir uns zwei in einer Ebene aneinander grenzende, unendlich ausgedehnte Medien. Im optisch dünneren der beiden soll sich eine punktförmige Lichtquelle befinden. Wenn wir die von ihr ausgehenden Strahlen verfolgen und die Brechung an der Trennungsfläche in gewöhnlicher Weise berücksichtigen, so gelangen wir zum bekannten Resultat, daß im dichteren Medium das Licht nur innerhalb eines Kegels vorhanden ist, dessen Öffnung höchstens das Doppelte des Grenzwinkels $\varphi$ ($\sin\varphi = n$; $n$ — rel. Brechungsexponent) beträgt.

Die Methode der streifenden Inzidenz zur Bestimmung des Brechungsexponenten gründet sich eben auf die Tatsache, daß im dichteren Medium eine solche — außerordentlich scharfe — Grenze zwischen Hell und Dunkel existiert.

Es zeigt sich nun, daß die Sache anders wird, wenn die Lichtquelle sich nahe an der Trennungsebene befindet. Je mehr der Abstand zwischen beiden abnimmt, desto verwaschener wird die Lichtgrenze. Ist schließlich dieser Abstand klein im Vergleich zu der Wellenlänge, so wird Licht in das dichtere Medium nach allen Richtungen eingestrahlt. Ein Grenzwinkel im gewöhnlichen Sinne existiert dann nicht mehr.

Die genauere Theorie dieses Verhaltens soll weiter unten besprochen werden. Die Überlegungen, auf welche sie sich gründet, will ich dagegen gleich hier anführen. Man übersieht dann sofort die qualitative Seite der genannten Erscheinung.

1. Wenn man eine ebene Welle aus dem dichteren in das dünnere Medium einfallen läßt, so ist bekanntlich auch dann, wenn der Einfallswinkel größer als der Grenzwinkel ist und Totalreflexion eintritt, ein Feld im dünneren Medium vorhanden. Die Amplitude dieses Feldes nimmt sehr stark (expotentiell) mit der Entfernung von der Trennungsebene ab, so daß das Gebiet im dünneren Medium, in welchem das Feld existiert, sich praktisch auf eine Schicht beschränkt, deren Dicke von der Größenordnung einer Wellenlänge ist.

2. Es besteht der folgende allgemeine Reziprozitätssatz (vgl. § 5): Man betrachte zwei verschiedene Fälle: a) Eine punktförmige monochromatische Lichtquelle von einer bestimmten Schwingungsrichtung $h$ und einer Stärke[1]) $s$ befindet sich im Punkte $A$ und erzeugt im Punkte $B$ eine elektrische Feldintensität $E$. Ihre Komponente in einer Richtung $h'$ sei $E_{h'}$. b) Es befindet sich zweitens eine ebensolche Quelle von der Schwingungsrichtung $h'$ und Stärke $s'$ im Punkte $B$. Das von ihr im Punkte $A$ erzeugte Feld sei $E'$ mit der Komponente $E_h'$ in der Richtung $h$.

Der Reziprozitätssatz sagt aus: Wenn $s = s'$, so ist auch $E_{h'} = E_h'$.

1) Dieser Fall ist als elektrisches Problem von A. Sommerfeld in seiner Arbeit „Über die Ausbreitung der Wellen in der drahtlosen Telegraphie" (Ann. d. Phys. 28, 665, 1909) behandelt worden. Der Ausgangspunkt für meine Arbeit war die Frage, welche optischen Erscheinungen unter den entsprechenden Bedingungen auftreten. Ich sehe soeben aus dem Heft vom 22. Dez. der C. R., daß P. Selényi dieselbe optische Erscheinung behandelt hat. Da mein Aufsatz neue Versuche enthält und die genauere Theorie der Erscheinung bringt (Selényi hat eine solche für später in Aussicht gestellt), so veröffentliche ich das schon seit einigen Monaten druckfertige Manuskript ohne Änderungen.

1) Die Stärke einer Lichtquelle wird weiter unten definiert.

Durch 1 und 2 ist offenbar das oben besprochene Verhalten erklärt.

§ 2. Vor der Beschreibung der eigentlichen Versuche möchte ich eine Anordnung erwähnen, die weiter benutzt wird und die zugleich zum Nachweis des bei Totalreflexion in das dünnere Medium eindringende Feld dienen kann. Ich will übrigens gleich hier bemerken, daß dieses Feld schon öfters experimentell untersucht worden ist[1]).

Läßt man Licht auf eine Grenzfläche zwischen Glas und einer fluoreszierenden Flüssigkeit in der Richtung Glas—Flüssigkeit auffallen und vergrößert allmählich den Einfallswinkel, so verschwindet der Fluoreszenzkegel, sobald der Grenzwinkel überschritten ist. Wenn aber die Lösung nicht zu verdünnt ist, so leuchtet die Stelle der Grenzfläche, wo das Licht auffällt, weiter auch dann, wenn man den Grenzwinkel weit überschreitet. Dieses Leuchten zeigt offenbar die Existenz des gesuchten Feldes an. Diese Methode des Nachweises scheint mir dadurch ausgezeichnet zu sein, daß man es hier — der Theorie entsprechend — wirklich mit zwei optisch einheitlichen, beliebig ausgedehnten Medien zu tun hat, die in einer Ebene aneinander grenzen.

Allerdings ist wegen der Absorption in der Flüssigkeit die Reflexion in das erste Medium nicht mehr streng total. Dieser Einwand gilt aber selbstverständlich gegen jede Art des Nachweises des bei „Totalreflexion" in das zweite Medium eindringenden Feldes.

§ 3. Die Versuche über das besprochene Verhalten der nahe an der Trennungsfläche zweier Körper gelegenen Lichtquelle wurden mit der aus Fig. 1 ersichtlichen Anordnung

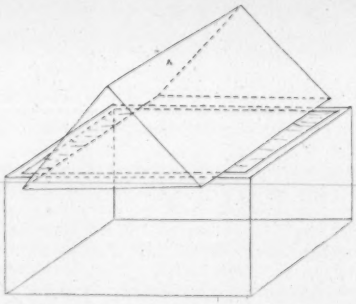


Fig. 1.

1) Cl. Schaefer u. G. Groß, Ann. d. Phys. **32**, 649, 1910. Daselbst Zusammenstellung der übrigen Literatur.

ausgeführt. Auf die Ränder eines parallelepipedischen Glastroges, der bis zum Rand mit einer wässerigen Fluoreszenzlösung gefüllt war, wurde ein rechtwinkliges Glasprisma mit der Hypotenusenfläche so aufgelegt, daß die Flüssigkeit in unmittelbarer Berührung mit der Glasfläche stand. Die ev. auftretenden Luftblasen können durch Nachfüllen der Flüssigkeit bei bereits aufgelegtem Prisma leicht entfernt werden. Die Linse $L$ (Fig. 2) entwarf

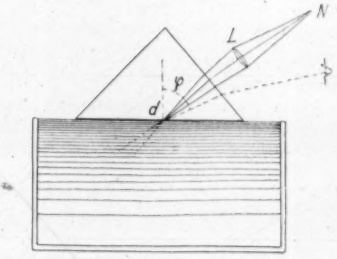



Fig. 2.

das Bild des horizontal gestellten Nernststiftes $N$ durch das Prisma hindurch auf der Trennungsebene Glas—Flüssigkeit. Der in die Flüssigkeit eindringende Fluoreszenzkegel dient nun als Lichtquelle für den eigentlichen Versuch.

Man hat also hier, wie erforderlich, eine Lichtquelle, die dicht an der Trennungsebene liegt, oder besser gesagt, deren intensivster Teil dieser Bedingung genügt; denn der Kegel des Fluoreszenzlichtes ist auch im Innern der Flüssigkeit auf eine gewisse Strecke sichtbar.

Man beobachtet nun das Fluoreszenzbild in $d$ (Fig. 2) am besten von derselben Seite, von der auch das fluoreszenzerregende Licht auffällt, indem man aus seiner Einfallsebene etwas herausgeht.

Ist zunächst der Winkel $\varphi$ (Fig. 2) klein, so sieht man ein recht starkes Leuchten. Geht man allmählich zu größeren Beobachtungswinkeln $\varphi$ über, so verschwindet an einer bestimmten Stelle ziemlich plötzlich der größte Teil der Intensität. Dies tritt ein, wenn der Winkel $\varphi$ gleich dem Grenzwinkel Glas—Flüssigkeit geworden ist. Ein Teil der Intensität bleibt aber übrig und dieser Teil nimmt nur sehr langsam mit der weiteren Vergrößerung von $\varphi$ ab. Die Deutung des Versuches ist die folgende: Die bleibende Intensität rührt her von demjenigen Teil der Lichtquelle, welcher sich in einer sehr kleinen Entfernung von der Trennungsebene befindet. Für diesen Teil

gibt es keinen Grenzwinkel. Wie klein diese Entfernung sein muß, läßt sich schätzungsweise entnehmen aus dem Verhältnis der beim Überschreiten des Grenzwinkels nicht verschwindenden zu der gesamten vor dem Überschreiten vorhandenen Intensität. Die eben angeführte Deutung wird bestätigt durch einen zweiten Versuch.

Nämlich: Man vergrößert den Einfallswinkel des fluoreszenzerregenden Strahls soweit, daß Totalreflexion eintritt. Dann dringt das Licht in die fluoreszierende Flüssigkeit nur bis zu einer sehr kleinen Tiefe ein. Die — jetzt außerordentlich dünne — fluoreszierende Schicht dient wiederum als Lichtquelle.

Man konstatiert zunächst, daß jetzt die gesamte Intensität des Fluoreszenzbildes ungefähr ebenso groß ist wie diejenige, welche im ersten Versuch beim Überschreiten des Grenzwinkels zurückblieb. Das ist offenbar durch die kleine Gesamtdicke der leuchtenden Schicht bedingt.

Beobachtet man nun wie beim ersten Versuch, indem man zu immer größeren Beobachtungswinkeln übergeht, so findet man im Gegensatz zum ersten Versuch keine Richtung, bei der die Intensität eine plötzliche Änderung erleidet. Denn hier liegt die ganze Lichtquelle dicht an der Trennungsebene.

Durch eine kleine Modifikation des Versuchs kann man sich so einrichten, daß man gleichzeitig nebeneinander zwei Lichtquellen hat, von denen die eine ganz nahe an der Trennungsfläche, die andere dagegen im wesentlichen weit davon liegt.

Das erregende Licht (vgl. Fig. 3) durch-

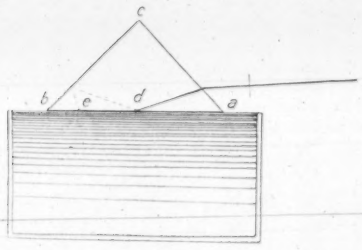



Fig. 3.

setzt nochmals, nachdem es von $ab$ und $bc$ reflektiert worden ist, die Grenzebene unter einem kleinen Winkel und dringt bei $e$ in die Flüssigkeit ein. Das Fluoreszenzlicht ist hier in der Richtung des Strahls ausgedehnt wie beim ersten Versuch, aber dennoch verhältnismäßig schwach, weil das zweimal reflektierte Licht selbst schwach ist. Man beobachtet die beiden Bilder $d$ und $e$. Beim Überschreiten des Grenzwinkels ändert sich, wie bereits besprochen wurde, die Intensität bei $d$ nicht merklich. Dagegen verschwindet das Bild $e$ so gut wie vollständig; denn hier ist die dünne, an der Trennungsebene unmittelbar anliegende Schicht zu wenig intensiv, um bequem wahrgenommen zu werden. Beim genauen Beobachten bemerkt man übrigens auch hier ein schwaches Leuchten.

## Zur Theorie.

§ 4. Im Punkte $A$ des dünneren Mediums I (Fig. 4) befindet sich die monochromatische

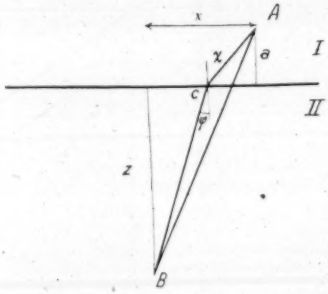



Fig. 4.

Lichtquelle. Es soll das Feld im Punkte $B$ des Mediums II bestimmt werden.

Wir nehmen an, daß der Beobachtungspunkt $B$ in einem im Verhältnis zur Wellenlänge sehr großen Abstand $z$ von der Grenzebene gelegen ist. Der Abstand $a$ (vgl. Fig. 4) soll der Einfachheit wegen klein im Verhältnis zu $z$ sein. Bezüglich des Verhältnisses von $a$ zur Wellenlänge soll keine Beschränkung auferlegt werden.

Der Gang der Berechnung des von der Quelle $A$ im Punkte $B$ erzeugten Feldes ist der folgende: Wir denken uns in $B$ eine Lichtquelle angebracht. Von dieser gehen gewöhnliche Kugelwellen aus, da sie sich weit von der Trennungsebene befindet. Sie werden an der Grenzebene gebrochen. Die Amplitude der gebrochenen Welle kann in gewöhnlicher Weise nach den Fresnelschen Formeln (wir sehen von der Absorption ab) für ebene Wellen berechnet werden. Man hat also das Feld, welches im Punkte $A$ von der supponierten, in $B$ gelegenen Quelle erzeugt wird, gefunden. Da die Entfernung $a$ klein im Vergleich zu $z$

ist, so kann man als Einfallswinkel für die Strahlen, die nach der Brechung den Punkt $A$ treffen, den Winkel ansetzen, den die Verbindungslinie $AB$ mit der Normalen bildet. Aus demselben Grunde kann die Abnahme der Amplitude, die auf dem Weg von der Trennungsebene bis zum Punkte $A$ wegen der Divergenz des Bündels stattfindet, unberücksichtigt bleiben.

Hat man auf diese Weise das Feld der Quelle $B$ im Punkte $A$ ermittelt, so läßt sich durch Anwendung des bereits angeführten Reziprozitätssatzes sofort das gesuchte Feld der Quelle $A$ im Punkte $B$ finden.

Wir bezeichnen mit $E$ bzw. $H$ das elektrische bzw. magnetische Feld, welches von einer in der $y$-Richtung ($\perp x, z$-Ebene) schwingenden, punktförmigen, monochromatischen Lichtquelle herrührt. Eine solche Quelle kann z. B. durch ein schwingendes Elektron realisiert gedacht werden. Sie befinde sich in einem unendlich ausgedehnten Medium. Wir setzen

$$k^2 = \frac{\varepsilon \nu^2 + i \nu \sigma}{c^2},$$

wo $c$ die Lichtgeschwindigkeit, $\nu$ die zyklische Schwingungszahl, $\varepsilon$ die Dielektrizitätskonstante, $\sigma$ die Leitfähigkeit. Die magnetische Permeabilität sei $= 1$.

Die in Heavisideschen Einheiten geschriebenen Maxwellschen Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon E + \sigma E &= c \operatorname{rot} H \\ H &= -c \operatorname{rot} E \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

liefern dann in bekannter Weise nach Hertz (vgl. z. B. Sommerfeld l. c.):

$$\left.\begin{aligned} H_z &= \frac{\partial \pi}{\partial x}, \quad H_x = -\frac{\partial \pi}{\partial z}, \quad H_y = 0, \\ E_z &= \frac{i\nu}{c}\frac{1}{k^2}\frac{\partial^2 \pi}{\partial z \partial y}; \quad E_x = \frac{i\nu}{c}\frac{1}{k^2}\frac{\partial^2 \pi}{\partial x \partial y}; \\ E_y &= -\frac{i\nu}{c}\frac{1}{k^2}\left(\frac{\partial^2 \pi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \pi}{\partial z^2}\right), \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

wobei

$$\pi = \frac{s \cdot e^{ikR}}{R}$$

gesetzt ist. $R$ bedeutet die Entfernung von der Quelle. Der Zeitfaktor $e^{-i\nu t}$ ist weggelassen. Die Konstante $s$ bezeichnen wir als die Stärke der Lichtquelle.

Wir denken uns jetzt in $B$ eine Quelle angebracht, deren Schwingungen senkrecht zur Zeichenebene erfolgen. Ihre Stärke sei $= 1$.

Im Punkte $c$ ist der elektrische Vektor $=$

$$i \cdot \frac{\nu}{c r} e^{ik_1 r},$$

wenn $r$ die Entfernung $Bc$ bedeutet.

Die gebrochene Welle $E$ in $A$ ist nach Fresnel gegeben durch

$$E = \frac{2\nu i \sin\chi \cos\varphi}{cr \sin(\varphi + \chi)} e^{i(k_2 \sin\varphi z + k_2 \cos\varphi z + k_1 \cos\chi a)}, \quad (3)$$

wenn $a$ die Entfernung von $A$ von der Grenzebene ist.

Wir wenden den Reziprozitätssatz an und erhalten das Resultat:

Befindet sich im Punkte $A$ eine senkrecht zur Zeichenebene schwingende Lichtquelle, so sendet sie in das Medium II eine Welle, die in einer großen Entfernung die Form (3) hat.

Nun sind zwei Fälle zu unterscheiden:

1. $\sin\varphi < n$: Dann ist die Amplitude $\mathfrak{A}$ offenbar gegeben durch

$$\mathfrak{A} = \frac{2\nu \sin\chi \cos\varphi}{\sin(\varphi + \chi)}, \quad (4)$$

wobei

$$\frac{\sin\varphi}{\sin\chi} = n$$

ist.

2. Der zweite, uns speziell interessierende Fall tritt ein, wenn $\sin\varphi > n$ ist.

Die Formel behält auch hier ihre Gültigkeit. Man hat nur zu setzen:

$$\sin\chi = \frac{\sin\varphi}{n}, \quad \cos\chi = i\sqrt{\left(\frac{\sin\varphi}{n}\right)^2 - 1}$$

und in gewöhnlicher Weise zum reellen Teil überzugehen. Tut man dies, so wird die Amplitude $\mathfrak{A}$ in diesem Falle:

$$\mathfrak{A} = \frac{2\nu}{cr}\frac{\cos\varphi}{\sqrt{1 - n^2}} e^{-\frac{2\pi a}{\lambda_1}\sqrt{\left(\frac{\sin\varphi}{n}\right)^2 - 1}}. \quad (4a)$$

$k_1$ ist $= \frac{2\pi}{\lambda_1}$ gesetzt; denn es wird angenommen, daß das Medium absorptionsfrei ist; dabei bedeutet $\lambda_1$ die Wellenlänge in I.

Ganz analog lassen sich die Amplituden für die beiden anderen Schwingungsrichtungen der Lichtquelle berechnen. Es ergibt sich:
für die Lichtquelle, in welcher die Schwingungen senkrecht zur Trennungsebene erfolgen:

$$\mathfrak{A} = \frac{2\nu}{cr}\frac{\sin^2\chi \cos\varphi}{\sin(\varphi + \chi)\cos(\varphi - \chi)} \qquad \sin\varphi < n \quad (5)$$

$$\mathfrak{A} = \frac{2\nu}{cr}\frac{\sin\varphi \cos\varphi}{\sqrt{(\sin^2\varphi - n^2\cos^2\varphi)(1 - n^2)}} e^{-\frac{2\pi a}{\lambda_1}\sqrt{\frac{\sin^2\varphi}{n^2} - 1}} \qquad \sin\varphi > n \quad (5a)$$

Und schließlich für eine Lichtquelle, die in der Zeichenebene und parallel zur Trennungsfläche schwingt

$$\mathfrak{A} = \frac{2\nu \sin\chi \cos\chi \cos\varphi}{c\nu \sin(\varphi+\chi)\cos(\varphi-\chi)} \qquad \sin\varphi < n \tag{6}$$

$$\mathfrak{A} = \frac{2\nu}{c\nu} \cdot \frac{\sqrt{\sin^2\varphi - n^2}\cdot\cos\varphi}{\sqrt{(\sin^2\varphi - n^2\cos^2\varphi)(1-n^2)}} e^{-\frac{2\pi a}{\lambda_1}\sqrt{\frac{\sin^2\varphi}{n^2}-1}} \qquad \sin\varphi > n \tag{6a}$$

Die entsprechenden Phasen lassen sich ebenfalls ganz einfach berechnen, doch soll darauf nicht näher eingegangen werden.

Betrachtet man die Ausdrücke (4a, 5a, 6a), welche nach dem Überschreiten des Grenzwinkels gelten, so sieht man, daß der beim Passieren des Grenzwinkels stattfindende Abfall der Intensität schnell oder langsam erfolgt, je nachdem $\frac{a}{\lambda_1}$ eine große oder eine kleine Zahl ist. Ist $\frac{a}{\lambda_1}$ sehr groß, so fällt die Intensität praktisch sofort auf Null. Das ist das gewöhnliche Verhalten, bei welchem eine scharfe Grenze zwischen Hell und Dunkel existiert. Ist dagegen $2\pi\frac{a}{\lambda_1}$ nicht groß, so erfolgt der Abfall nur langsam. Dieser Fall entspricht dem oben beschriebenen Versuch II. Daß bei diesem Versuch die Lichtquelle ausgedehnt ist und nicht punktförmig, ändert hier bei nichts Wesentliches.

In der Fig. 5 sind die nach 4 und 4a berechneten Amplituden in relativem Maß als Funktion der Beobachtungswinkel aufgetragen, für den rel. Brechungsindex ca. $^3/_4$ und für Werte von $\frac{2\pi a}{\lambda_1} = 0$ und 6, bzw. für $a = 0$ und $a =$ ca. $\lambda$.

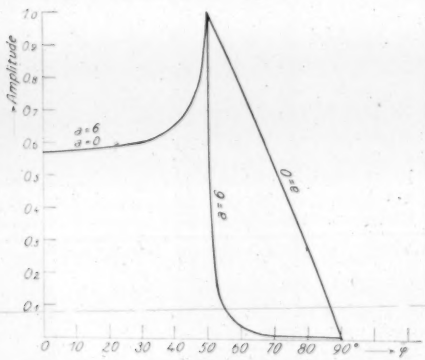



Fig. 5[1]).

1) In der Figur ist irrtümlicherweise $a$ an Stelle von $\frac{2\pi a}{\lambda_1}$ geschrieben.

## Der Reziprozitätssatz.

§ 5. Der in § 1 formulierte und zur Ausrechnung der Amplituden angewandte Reziprozitätssatz ist von H. A. Lorentz[1]) abgeleitet worden. Die hier benutzte Formulierung weicht etwas von der Lorentzschen ab. Ich will deshalb kurz den Beweis, welcher übrigens ebenfalls im wesentlichen mit dem von Lorentz gegebenen übereinstimmt, angeben.

Die Felder, die von den Quellen $A$ bzw. $B$ herrühren, bezeichnen wir mit $E$, $H$ bzw. $E'$, $H'$. Sowohl $E$ und $H$, wie auch $E'$ und $H'$ genügen den Maxwellschen Gleichungen überall, ausgenommen in den Punkten $A$ bzw. $B$ selbst. Wir schließen diese Punkte durch kleine Kugeln aus. Der übrig bleibende, unendliche Raum sei $\Omega$. Wir denken uns zunächst die Gl. (1) für $E$ und $H$ angeschrieben; multiplizieren die erste skalar mit $E'$, die zweite mit $H'$ und subtrahieren die zweite von der ersten. Von der erhaltenen Beziehung subtrahieren wir eine ganz analoge, in welcher die gestrichenen und die ungestrichenen Größen vertauscht sind.

Da $\frac{\partial}{\partial t} = -i\nu$ ist, so fällt die ganze linke Seite dabei weg. Wir integrieren nun über den ganzen Raum $\Omega$. Indem wir jetzt das Raumintegral in ein Oberflächenintegral verwandeln, erhalten wir

$$\int([E'H]_n - [EH']_n)\,d\sigma = 0\,. \tag{7}$$

$[\ ]_n$ bezeichnet die Normalkomponente des Vektorprodukts.

Die Integration erstreckt sich über die Oberfläche im Unendlichen und über die Oberflächen der beiden Kugeln. Der erste Teil kann unberücksichtigt bleiben (vgl. H. A. Lorentz l. c.).

Die Integrale über die beiden Kugeloberflächen für verschwindenden Radius können leicht berechnet werden.

Man muß dabei nur berücksichtigen, daß das Feld einer Quelle, die sich im Zentrum einer solchen Kugel befindet, in der unmittelbaren Nähe der Quelle, also auch auf der Oberfläche der verschwindend kleinen Kugel durch die Gl. (2) gegeben ist. Denn darin besteht überhaupt die Definition der punktförmigen Lichtquelle[2]).

1) H. A. Lorentz, Versl. K. Ak. van Wet., S. 345, 1905.

2) Der Fall, daß die Quelle in der Trennebene liegt, soll ausgeschlossen bleiben.

Führt man nun die Integration (7) aus, so erhält man

$$sE_h' = s'E_h, \qquad (8)$$

wenn $h$ und $h'$ die Richtungen bezeichnen, in denen die Schwingungen der Quelle $A$ bzw. $B$ erfolgen. Die Beziehung (8) spricht den Reziprozitätssatz aus.

### § 6. Beziehung zur Theorie von A. Sommerfeld.

Sommerfeld hat die Ausbreitung der Wellen in der drahtlosen Telegraphie[1]) behandelt. Dieses Problem ist an sich von dem entsprechenden, rein optischen Problem selbstverständlich nicht verschieden. Daß man in der drahtlosen Telegraphie mit den gewöhnlichen optischen Formeln nicht auskommt, liegt daran, daß bei ihr der Fall einer Quelle, die sich sehr nahe an der Trennungsebene zweier Medien befindet, vorliegt; ein Fall, welcher eben in der Optik nicht vorkam. In der Arbeit von Sommerfeld und in der sich an diese anschließenden Arbeit von v. Hoerschelmann ist nun die allgemeine Lösung für diesen Fall gegeben worden. Dadurch ist aber die Frage nicht erledigt. Denn wie Sommerfeld selbst ausdrücklich betont, liegt die Schwierigkeit nicht in der Aufstellung, sondern in der Diskussion der Lösung. Nun diskutiert Sommerfeld die Lösung, der Natur seiner Aufgabe gemäß, nur für den Fall, daß auch der Punkt, in dem das Feld gesucht wird, sich in einem kleinen Abstand von der Trennungsebene befindet. Wesentlich ist namentlich die Kenntnis des Feldes in Abständen, die vergleichbar bzw. klein im Verhältnis zur Wellenlänge $\lambda$ sind. Hier bilden sich, wie Sommerfeld gezeigt hat, Oberflächenwellen aus, die, nebenbei bemerkt, auch vielleicht auf rein optischem Gebiete zu interessanten Erscheinungen Veranlassung geben können. Die Ausdrücke von Sommerfeld gelten auch noch für Abstände von der Grenzebene, die zwar groß sind im Vergleich zu $\lambda$, aber dennoch klein gegen die Entfernung von der Quelle sind, sie gelten mit anderen Worten nur für Beobachtungswinkel, die sehr nahe an $\frac{\pi}{2}$ liegen. Außerdem sind die Formeln nur für vertikale Schwingungen abgeleitet und es ist vorausgesetzt, daß die Quelle in der Trennungsebene selbst gelegen ist.

Im Gegensatz dazu beschränken wir uns von vornherein auf Beobachtungspunkte, die in einem im Verhältnis zu $\lambda$ großen Abstand von der Grenzfläche liegen, wie es den beschriebenen Versuchen auch entspricht. Dadurch werden die Verhältnisse bedeutend einfacher. Man kann hier das Feld, wie oben gezeigt worden ist, für beliebige Beobachtungswinkel und willkürliche Schwingungsrichtungen und Lagen der Quelle durch Kombination der Fresnelschen Formeln mit dem Reziprozitätssatz finden, ohne daß man auf die allgemeine Lösung von Sommerfeld zurückgreift. Für diesen Fall scheint übrigens die Diskussion seiner Lösung auch einfach zu sein.

Die Sommerfeldschen und die hier mitgeteilten Formeln ergänzen sich somit gegenseitig.

Für Beobachtungswinkel, die sehr nahe an $\frac{\pi}{2}$ liegen, aber von $\frac{\pi}{2}$ verschieden sind, gelten beide; hier ist also ein Vergleich möglich. Zu diesem Zweck hat man im Ausdruck (5a) $a = 0$ und $\varphi = \frac{\pi}{2} - \psi$ ($\psi$ sehr klein) zu setzen. Der so erhaltene Wert ist offenbar mit dem elektrischen Feld zu vergleichen, das man aus dem Sommerfeldschen $Q_2$ (l. c. [34a] p. 700) erhält (wobei nur die Glieder mit $z$ berücksichtigt werden müssen), oder, was dasselbe ist, mit seinem Ausdruck $E_z$ ([35a] p. 702), in welchem $k_1$ und $k_2$ vertauscht sind und $k_1^2 + k_2^2$ durch $2k_2^2$ ersetzt ist[1]).

Der Vergleich zeigt, daß unsere Formel (5a) wirklich in die Sommerfeldsche übergeht.

1) A. Sommerfeld, Ann. d. Phys. **28**, 665, 1909.

1) Bei Sommerfeld liegt nämlich die Quelle in der Trennungsebene selbst; bei uns liegt sie ganz im Medium I. Vgl. Sommerfeld, l. c. und v. Hörschelmann, Jahrb. d. drahtl. Telegraph. **5**, 14, 1911.

Straßburg i. Els., Physik. Institut.

(Eingegangen 9. Januar 1914.)

## Lichtfortpflanzung in inhomogenen Medien. (Theorie der Lippmannschen Farbenphotographie.) II[1]).

Von K. Försterling.

In einer früheren Arbeit hatte ich ebene, homogene, transversale Wellen, welche sich in einem Körper parallel der $Z$-Achse fortpflanzen, wenn die Dielektrizitätskonstante ebenfalls mit $z$ variiert, behandelt. In dieser Arbeit soll die Dielektrizitätskonstante $\varepsilon$ wiederum nur eine Funktion von $z$ sein, die Wellennormale soll aber jetzt beliebig in der $XZ$-Ebene liegen. Unsere Formeln werden also diejenigen der früheren Arbeit als Spezialfall enthalten. Leider ist dort bei der nachträglichen Einführung der

1) I: diese Zeitschr. **14**, 265, 1913.

Abkürzungen $\mathfrak{r}$ und $\mathfrak{d}$ ein Versehen vorgekommen, so daß zwar die Resultate richtig blieben, aber doch einige Formeln, namentlich (3) und (5), entstellt sind.

1. Differentialgleichungen und Grenzbedingungen. Unserer Annahme gemäß sind die elektrische Feldstärke $\mathfrak{E}$: $(X, Y, Z)$ und die magnetische Feldstärke $\mathfrak{H}$ $(A, B, C)$ nur Funktionen von $x$ und $z$. Zugelassen werden nur zeitlich periodische Funktionen von der Form $e^{i\nu t}$ als Lösungen der Maxwellschen Gleichungen. Aus ihnen folgen dann für die einzelnen Komponenten die Differentialgleichungen:

$$\left.\begin{aligned}
-\nu^2\frac{\varepsilon}{c^2}X &= \frac{\partial^2 X}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 X}{\partial z^2}+\frac{\partial Z}{\partial x}\frac{\partial \varepsilon}{\partial z},\\
-\nu^2\frac{\varepsilon}{c^2}Y &= \frac{\partial^2 Y}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 Y}{\partial z^2},\\
-\nu^2\frac{\varepsilon}{c^2}Z &= \frac{\partial^2 Z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 Z}{\partial z^2}+\frac{\partial Z}{\partial z}\frac{\partial \varepsilon}{\partial z}+Z\frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial z^2},\\
-\nu^2\frac{\varepsilon}{c^2}A &= \frac{\partial^2 A}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 A}{\partial z^2}-\left(\frac{\partial A}{\partial z}-\frac{\partial C}{\partial x}\right)\frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial \varepsilon}{\partial z},\\
-\nu^2\frac{\varepsilon}{c^2}B &= \frac{\partial^2 B}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 B}{\partial z^2}-\frac{\partial B}{\partial z}\frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial \varepsilon}{\partial z},\\
-\nu^2\frac{\varepsilon}{c^2}C &= \frac{\partial^2 C}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 C}{\partial z^2}.
\end{aligned}\right\} \quad (1)$$

Die Grenzbedingungen bestehen darin, daß bei $+\infty$ keine Lichtquellen vorhanden sein sollen. Um diese Annahme im allgemeinsten Falle mathematisch zu formulieren, müßte man den zeitlichen Anfangszustand vorgeben, während wir uns hier auf rein periodische Vorgänge beschränkt haben. Wir wollen daher stets voraussetzen, daß bei $+\infty$ das Medium homogen ist (daß also im positiv Unendlichen keine Reflexionen mehr stattfinden), und verlangen, daß sich dort eine ebene Welle mit der Normalen in der $x$, $y$-Ebene fortpflanzt, also $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{H}$ die Form haben:

$$\left.\begin{aligned}
&De^{i\nu(t-n_3(a_1x+c_1z))},\\
&n=\sqrt{\varepsilon_{z=\infty}},\quad a_3^2+c_3^2=1.
\end{aligned}\right| \quad (2)$$

Am einfachsten sind in (1) die Gleichungen für $Y$, $B$ und $C$. Es genügt nun, diese Gleichungen zu behandeln und dann mittels der Differentialgleichungen:

$$i\nu\frac{\varepsilon}{c}X=-\frac{\partial B}{\partial z},\qquad i\nu\frac{\varepsilon}{c}A=+\frac{\partial Y}{\partial z},$$
$$i\nu\frac{\varepsilon}{c}Z=+\frac{\partial B}{\partial x}$$

durch Differentiation $X$, $Z$ und $A$ zu finden.

Die Gleichungen für $Y$ und $C$ führen auf die Form:

$$-\nu^2\varepsilon(z)U=\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial z^2}, \quad (3)$$

während für $B$ gilt:

$$-\nu^2\varepsilon(z)u=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}-\frac{\partial u}{\partial z}\frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial \varepsilon}{\partial z}. \quad (4)$$

Indem man den Ansatz macht:

$$\left.\begin{aligned}
U(x,z)&=V(x)W(z),\\
u(x,z)&=v(x)w(z)
\end{aligned}\right| \quad (5)$$

erhält man leicht für $V, W, v, w$ die Bestimmungsgleichungen:

$$\left.\begin{aligned}
-\nu^2[\varepsilon(z)-p^2]&=\frac{1}{w}\frac{d^2W}{dz^2},\\
-\nu^2p^2&=\frac{1}{v}\frac{d^2V}{dx^2}
\end{aligned}\right.$$

und

$$\left.\begin{aligned}
-\nu^2[\varepsilon(z)-q^2]&=\frac{1}{w}\frac{d^2w}{dx^2}+\frac{1}{w}\frac{dw}{dz}\varepsilon\frac{d\frac{1}{\varepsilon}}{dz},\\
-\nu^2q^2&=\frac{1}{v}\frac{d^2v}{dx^2},
\end{aligned}\right| \quad (6)$$

wobei $p^2$ und $q^2$ willkürliche Konstanten bedeuten.

Im Hinblick auf die Grenzbedingung (2) folgt:

$$V=Te^{-i\nu px},\quad v=T'e^{-i\nu qx},$$
$$p=q=n_3a_3 \quad (T \text{ und } T' \text{ Konstanten}).$$

Diese letzte Gleichung enthält ersichtlich das Brechungsgesetz.

Den Gleichungen für $W$ und $w$ suchen wir zu genügen durch:

$$\left.\begin{aligned}
W&=Ae^{-i\nu\omega_-(z)}+Be^{+i\nu\omega_+(z)}=W_-+W_+,\\
w&=A'e^{-i\nu\omega_-'(z)}+B'e^{+i\nu\omega_+'(z)}=w_-+w_+.
\end{aligned}\right| \quad (7)$$

Hierbei genügen

$$\zeta_+=\frac{d\omega_+}{dz}\quad\text{und}\quad \eta=\frac{d\omega_+'}{dz}$$

den Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned}
-\nu^2(\varepsilon(z)-p^2)&=-\nu^2\zeta_+^2+i\nu\frac{d\zeta_+}{dz},\\
-\nu^2(\varepsilon(z)-p^2)&=-\nu^2\eta_+^2+i\nu\frac{d\eta_+}{dz}+\\
&\quad+i\nu\varepsilon\frac{d\frac{1}{\varepsilon}}{dz}\eta.
\end{aligned}\right| \quad (8)$$

Oder wenn man

$$\frac{\eta}{\varepsilon}=\xi \quad (9)$$

setzt:

$$-\frac{1}{\varepsilon(z)}\nu^2(\varepsilon(z)-p^2)=-\nu^2\varepsilon(z)\xi_+^2+i\nu\frac{d\xi_+}{dz}. \quad (8a)$$

Über die in $\zeta_+$ resp. $\xi_+$ enthaltene Integrationskonstante können wir beliebig verfügen, da unser Ansatz (7) schon zwei willkürliche Konstanten enthält.

$\zeta_+$ und $\xi_+$ können als überall endlich und

stetig angesehen werden. Da nämlich $\varepsilon(z)$ überall endlich ist, so müßte $\zeta_\mp$ und $\frac{d\zeta_\mp}{dz}$ bzw. $\xi_\mp$ und $\frac{d\xi_\mp}{dz}$ zugleich unendlich werden. In der Nähe dieser Stelle würde in Annäherung sich offenbar ergeben:

$$\zeta_\mp = \mp\frac{1}{i\nu z + a}, \qquad \xi = \mp\frac{1}{i\nu\int\varepsilon(z)\,dz + b},$$

wobei $a$ und $b$ willkürliche Konstanten sind. Hieraus folgt, daß $\zeta_\mp$ und $\xi_\mp$ für reelle $z$ bei passender Wahl von $a$ und $b$ überhaupt nicht unendlich werden, z. B. bei reellem $\varepsilon(z)$, wenn $a$ und $b$ auch reell gewählt werden. Da nun aber $a$ und $b$ vollkommen willkürlich zu wählen sind, so wollen wir sie stets so festsetzen, daß $\zeta_\mp$ und $\xi_\mp$ für alle reellen $z$ endlich bleiben. Dasselbe gilt dann auch für $\frac{d\zeta_\mp}{dz}$ und $\frac{d\xi_\mp}{dz}$. Somit bleiben $\zeta_\mp$ und $\xi_\mp$ auch stetig.

2. Form der allgemeinen Lösung. Die willkürlichen Konstanten $A$ und $B$ sind nun aus der Grenzbedingung (2) zu bestimmen, wonach das für den ganzen Raum gültige Integral in das nur für $z > z_2$, wo $\varepsilon(z)$ den konstanten Wert $\varepsilon_3$ hat, gültige übergehen muß. Das ist bei gewöhnlichen Differentialgleichungen zweiter Ordnung offenbar erfüllt, wenn für irgendein $z_2' > z_2$ gilt:

$$\left.\begin{aligned} W &= W_+ + W_- = W_3, \\ \frac{dW}{dz} &= \frac{dW_+}{dz} + \frac{dW_-}{dz} = \frac{dW_3}{dz}; \\ w &= w_+ + w_- = w_3, \\ \frac{dw}{dz} &= \frac{dw_+}{dz} + \frac{dw_-}{dz} = \frac{dw_3}{dz}. \end{aligned}\right\} \qquad (10)$$

Die folgenden Entwicklungen sind formal für $W$ und $w$ dieselben, so daß man am Schluß von einem zum andern übergehen kann, indem man $\zeta$ mit $\eta$ vertauscht.

Sind die Werte von $\zeta_-$, $\zeta_+$ und $W$ in $z_2'$: $\zeta_1'$, $\zeta_2'$, $W'$, so erhält man aus (10)

$$W_-' = \frac{\zeta_2' + c_3 n_3}{\zeta_2' + \zeta_1'} W_3', \quad W_+' = \frac{\zeta_1' - c_3 n_3}{\zeta_2' + \zeta_1'} W_3',$$
$$n_3 = \sqrt{\varepsilon_3}.$$

Für ein beliebiges $z$ gilt also:

$$\left.\begin{aligned} W = \Big\{ &\frac{\zeta_2' + c_3 n_3}{\zeta_1' + \zeta_2'} e^{-i\nu\int_{z_2'}^{z}\zeta_-(z)\,dz} + \\ &+ \frac{\zeta_1' - c_3 n_3}{\zeta_1' + \zeta_2'} e^{+i\nu\int_{z_2'}^{z}\zeta_+(z)\,dz} \Big\} W_3'. \end{aligned}\right\} \qquad (11)$$

Hiermit ist $W$ (und analog $w$) für den ganzen Raum gegeben[1]). In Wirklichkeit erstreckt sich das inhomogene Dielektrikum nicht bis $-\infty$, sondern ist in den endlichen Grenzen $z_1 < z < z_2$ eingeschlossen. In dem Raume $z < z_1$ wird man im allgemeinen eine einfallende und reflektierte Welle superponiert erhalten, und setzen:

$$W = W_- + W_+ = W_e + W_r.$$

$W_e$ und $W_r$ sind nur für $z < z_1$, wo $\varepsilon(z)$ den konstanten Wert $\varepsilon_1$ hat, definiert. Wir setzen demgemäß:

$$W_e = E e^{-i\nu n_1 c_1 z}, \quad W_r = R e^{+i\nu n_1 c_1 z},$$
$$n_1 = \sqrt{\varepsilon_1}, \quad n_1 a_1 = n_3 a_3, \quad c_1^2 + a_1^2 = 1.$$

Damit $W$ für alle $z < z_1$ in $W_e + W_r$ übergeht, muß noch gelten:

$$\frac{dW_-}{dz} + \frac{dW_+}{dz} = \frac{dW_e}{dz} + \frac{dW_r}{dz}.$$

Diese beiden Bedingungen sind für irgendein $z_1' < z_1$ zu erfüllen. Hier mag $W$, $\zeta_-$, $\zeta_+$ die Werte $W_1$, $\zeta_1$, $\zeta_2$ annehmen. Kürzt man noch ab:

$$e^{+i\nu\int_{z_1'}^{z_1'}\zeta_-(z)\,dz} = e', \quad e^{+i\nu\int_{z_1'}^{z_1'}\{\zeta_-(z)+\zeta_+(z)\}\,dz} = e,$$

so erhält man:

$$\left.\begin{aligned} W_{r1} &= \frac{(n_1 c_1 - \zeta_1)(\zeta_2' + c_3 n_3) + (n_1 c_1 + \zeta_2)(\zeta_1' - c_3 n_3)\,e}{(n_1 c_1 + \zeta_1)(\zeta_2' + c_3 n_3) + (n_1 c_1 - \zeta_2)(\zeta_1' - c_3 n_3)\,e} W_{e1}, \\ W_3' &= \frac{2 n_1 c_1 (\zeta_2' + \zeta_1')\,e'}{(n_1 c_1 + \zeta_1)(\zeta_2' + c_3 n_3) + (n_1 c_1 - \zeta_2)(\zeta_1' - c_3 n_3)\,e} W_{e1}. \end{aligned}\right\} \qquad (12)$$

Analoge Ausdrücke erhält man für $w$, wenn man $\zeta$ mit $\eta$ vertauscht.

Wir wollen die gewonnenen Formeln verifizieren, indem wir sie auf eine Stelle anwenden, wo $\varepsilon$ von $\varepsilon_1$ auf $\varepsilon_2$ springt. Wir denken uns den Sprung aus einem allmählichen Übergang hervorgegangen, indem der Übergang immer schroffer und schroffer wird, indem $z_1$ ganz nahe an $z_2$ heranrückt. Wir können ebenfalls $z_1'$ und $z_2'$ nahe an den Punkt $z_1 = z_2$ heranrücken lassen. Da nun $\zeta$ und $\frac{\eta}{\varepsilon}$ und somit $\eta$ endliche Größen sind, wie wir am Schluß von § 1 sahen, so verschwinden die Integrale dieser Größen, von $z_1'$ bis $z_2'$ genommen. Es wird $e = e' = 1$, und die Formeln (12) gehen über in:

1) Wir diskutieren hier nicht näher die Lichtfortpflanzung innerhalb des inhomogenen Dielektrikums. In bezug auf diese Frage sei auf eine demnächst erscheinende Arbeit von Herrn W. Behrens verwiesen.

$$W_{r1} = \frac{\zeta_1'\zeta_2 - \zeta_1\zeta_2' + n_1c_1(\zeta_2' + \zeta_1') - n_3c_3(\zeta_1 + \zeta_2)}{\zeta_1\zeta_2' - \zeta_2\zeta_1' + n_1c_1(\zeta_2' + \zeta_1') + n_3c_3(\zeta_1 + \zeta_2)} W_{e1},$$

$$W_3' = \frac{2n_1c_1(\zeta_2' + \zeta_1')}{\zeta_1\zeta_2' - \zeta_2\zeta_1' + n_1c_1(\zeta_2' + \zeta_1') + n_3c_3(\zeta_1 + \zeta_2)} W_{e1}.$$

Ferner ist $\zeta$ und $\frac{\eta}{\varepsilon}$ stetig, so daß:

$$\zeta_1 = \zeta_1', \quad \zeta_2 = \zeta_2',$$

während

$$\frac{\eta_1}{\varepsilon_1} = \frac{\eta_1'}{\varepsilon_3}, \quad \frac{\eta_2}{\varepsilon_1} = \frac{\eta_2'}{\varepsilon_3}$$

ist. Daraus folgt:

$$W_{r1} = \frac{n_1c_1 - n_3c_3}{n_1c_1 + n_3c_3} W_{e1},$$

$$W_3' = \frac{2n_1c_1}{n_1c_1 + n_3c_3} W_{e1}.$$

Und:

$$w_{r1} = \frac{n_1c_1 - n_3c_3\frac{n_1^2}{n_3^2}}{n_1c_1 + n_3c_3\frac{n_1^2}{n_3^2}} W_{e1} = \frac{n_3c_1 - n_1c_3}{n_3c_1 + n_1c_3} W_{e1},$$

$$w_3' = \frac{2n_1c_1}{n_1c_1 + n_3c_3\frac{n_1^2}{n_3^2}} w_{e1} = \frac{2n_3c_1}{n_3c_1 + n_1c_3} w_{e1}.$$

Bedenkt man, daß $V_e = V_r = V_3'$ und $v_e = v_r = v_3'$ ist, so müssen die Koeffizienten von $w_e'$ und $W_e$ das Verhältnis der reflektierten und einfallenden Amplitude darstellen. In der Tat stimmen sie mit den bekannten Fresnelschen Formeln überein.

Auch die Stetigkeit von $\gamma$, $B$ und $C$ läßt sich sogleich aus unseren Betrachtungen von § 1 ersehen, da jedenfalls $\int \zeta_+(z)\,dz$ und $\int \varepsilon(z)\xi(z)dz$ stetig sind, da $\zeta(z)$ und $\xi(z)$ stetig sind, $\varepsilon(z)$ aber nur um einen endlichen Betrag springt. Durch Differentiation ergibt sich sogleich die Stetigkeit von $A$, da $\zeta_+$ stetig ist, und von $X$, da $\frac{\eta}{\varepsilon(z)} = \xi$ stetig bleibt.

3. Beschränkung auf kleine, aber beliebig schnelle Schwankungen der Dielektrizitätskonstante. Die gewonnenen Formeln für die reflektierte und die durchgehende Amplitude sind so kompliziert, daß eine Diskussion sehr umständlich erscheint, selbst wenn die $\zeta$ und $\eta$ aus den Differentialgleichungen bekannt wären. Gelingt doch schon die Diskussion der allgemeinen Formel für den Durchgang des Lichtes durch eine planparallele Platte, mit welcher unsere Formeln einige Ähnlichkeit haben, trotz ihrer einfacheren Gestalt nicht in voller Allgemeinheit. Wir werden uns daher auf Annäherungen beschränken müssen.

Wir wollen nur solche Fälle ins Auge fassen, wo $\zeta$, $\xi$ und $\eta$ ebenso wie $\varepsilon$ sich nur um kleine Beträge von einem konstanten Werte unterscheiden. Wenn wir also setzen:

$$\zeta = \zeta_0(1 + \psi(z)), \quad \xi = \xi_0(1 + \chi(z)),$$
$$\varepsilon(z) = \varepsilon_2 + \varphi(z),$$

so sollen $\psi$, $\chi$ und $\varphi$ klein neben eins sein, so daß höhere Potenzen als die erste dieser Glieder fortbleiben können. Über die Größe der Differentialquotienten machen wir keine Annahme.

Die Differentialgleichungen für $\zeta$ und $\xi$ (8) und (10) werden dann:

$$+\frac{iv}{\zeta_0}[\varepsilon_2 + \varphi(z) - p^2] = \mp iv\zeta_0[1 + 2\psi(z) + \frac{d\psi(z)}{dz},$$

$$\mp\frac{iv}{\xi_0}\left[1 - \frac{p^2}{\varepsilon_2} + \frac{p^2}{\varepsilon_2^2}\varphi(z)\right] = \mp iv\xi_0[\varepsilon_2 + \varphi(z) + 2\varepsilon_2\chi(z)] + \frac{d\chi(z)}{dz}.$$

Diese Gleichungen gehen durch die Verfügung:

$$\zeta_0 = \sqrt{\varepsilon_2 - p^2}, \quad \xi_0 = \frac{1}{\varepsilon_2}\sqrt{\varepsilon_2 - p^2}$$

über in:

$$\left.\begin{aligned} +iv\frac{\varphi(z)}{\zeta_0} &= \mp 2iv\zeta_0\psi(z) + \frac{d\psi(z)}{dz}, \\ \pm iv\left\{1 - 2\frac{p^2}{\varepsilon^2}\right\}\frac{\varphi(z)}{\varepsilon_2\xi_0} &= \mp 2iv\varepsilon_2\xi_0\chi(z) + \\ &\quad + \frac{d\chi(z)}{dz}. \end{aligned}\right\} \quad (13)$$

Hieraus folgt, da $\varepsilon_2\xi_0 = \zeta_0$ ist:

$$\left.\begin{aligned} \psi(z) &= -\frac{\chi(z)}{1 - 2\frac{p^2}{\varepsilon^2}} = \\ &= +\frac{iv}{\zeta_0}e^{+2iv\zeta_0 z}\int\varphi(z)\,e^{\mp 2iv\zeta_0 z}dz. \end{aligned}\right\} \quad (14)$$

Die Integrationskonstante können wir Null setzen, da an ihre Stelle das Verhältnis $\frac{B}{A}$ tritt.

Indem wir $\sqrt{\varepsilon_2} = n_2$ und vermöge der Beziehung

$$a_2n_2 = a_3n_3 = a_1n_1$$

den Richtungskosinus $a_2$ und entsprechend $c_2$ durch

$$a_2^2 + c_2^2 = 1$$

einführen, erhalten wir:

$$\zeta_0 = n_2c_2.$$

Für $\eta$ folgt:

$$\left.\begin{aligned}\eta_{\mp} &= \varepsilon(z)\left\{1-(c_2^2-a_2^2)\,\psi_{\mp}(z)\,\xi_0 = \right.\\ &= \zeta + \frac{\zeta_0}{\varepsilon_2}\left\{\varphi(z) - 2\,\zeta_0^2\,\psi(z)\right\} = \zeta \mp c_2^2\,\frac{d\psi(z)}{\frac{dz}{iv}}.\end{aligned}\right\} \quad (15)$$

Wir setzen noch:

$$\zeta_h = n_2 c_2\left\{1+\psi_h\right\},\quad \zeta_h' = n_2 c_2\left\{1+\psi_h'\right\},$$
$$\eta_h = \frac{n_1^2 c_2}{n^2}\left\{1+\chi_h\right\},\quad \eta_h' = \frac{n_3^2 c_2}{n_2}\left\{1+\chi_h'\right\}$$
$$h = 1,\ 2.$$

Diese Werte sind in die Gleichungen (12) einzuführen.

Hierbei können wir $W$ und $w$ gleich durch $U = VW$ und $u = vw$ ersetzen, da nach § 1 der Faktor $V$ bzw. $v$ für $W_e$, $W_r$, $W_3$ bzw. $w_e$, $w_r$, $w_3$ derselbe ist. Ferner soll $Y$ gleich durch die entsprechende magnetische Komponente ersetzt werden. Es ist:

$$Y_e = n_1 \mathfrak{E}_\beta,\quad Y_r = n_1 \mathfrak{R}_\beta,\quad Y_d = n_3 \mathfrak{D}_\beta,$$

wobei $\mathfrak{E}_\beta$, $\mathfrak{R}_\beta$, $\mathfrak{D}_\beta$ die Komponenten parallel der Einfallsebene sind. Analog mag statt $B_e$, $B_r$, $B_d$ jetzt $\mathfrak{E}_z$, $\mathfrak{R}_z$, $\mathfrak{D}_z$ geschrieben werden. Nun ist ferner nach (15) und (13):

$$iv\int \eta(z)\,dz = iv\int \zeta(z)\,dz - c_2^2\,\psi(z) =$$
$$= \int\left(\zeta_0 + \frac{1}{2\,\zeta_0}\,\varphi(z)\right)dz + \frac{1}{2}\,(1-2c_2^2)\,\psi(z).$$

Tritt daher $e^{iv\int\eta'(z)\,dz}$ oder $e^{iv\int\zeta(z)\,dz}$ mit einem Faktor von der Ordnung $\varphi(z)$ multipliziert auf, so kann man diese Ausdrücke durch

$$e^{iv\int\zeta_0\left\{1+\frac{1}{2\zeta_0^2}\varphi(z)\right\}dz}$$

ersetzen. Hierbei bedeutet:

$$\zeta_0\left\{1+\frac{1}{2\,\zeta_0^2}\,\varphi(z)\right\} = \sqrt{\zeta_0^2+\varphi(z)} =$$
$$= \sqrt{\varepsilon(z)+p^2} = n_z\cdot c_z$$

denjenigen Wert $n_z c_z$, den diese Größe haben würde, wenn der Brechungsindex $n_z$ dem Gesetz:

$$n_z = \sqrt{\varepsilon(z)}$$

folgen würde.

Schließlich findet man:

$$\left\{1+\frac{1}{2}\,(\psi_1'-\psi_1)\right\}e^{iv\int_{z_1'}^{z_2'}\zeta_-(z)\,dz} =$$
$$= \left\{1+\frac{1}{2}\,(\chi_1'-\chi_1)\right\}e^{iv\int_{z_1'}^{z_2'}\eta_-(z)\,dz} =$$
$$= e^{iv\int_{z_1'}^{z_2'}n_z c_z\,dz}.$$

Führt man noch die bekannten Fresnelschen Schwächungskoeffizienten bei Reflexion und Brechung ein, welche in unserer Annäherung lauten:

$$\mathfrak{r}_\beta = \frac{n_1 c_1 - n_2 c_2}{2\,n_2 c_2},\qquad \mathfrak{r}_\beta' = \frac{n_2 c_2 - n_3 c_3}{2\,n_2 c_2},$$
$$\mathfrak{r}_z = \frac{n_2 c_1 - n_1 c_2}{2\,n_2 c_2},\qquad \mathfrak{r}_z' = \frac{n_3 c_2 - n_2 c_3}{2\,n_2 c_2},$$
$$\mathfrak{d}_\beta = \left\{1-\mathfrak{r}_\beta\right\}\frac{n_2}{n_1},\qquad \mathfrak{d}_\beta' = \left\{1+\mathfrak{r}_\beta'\right\}\frac{n_3}{n_2},$$
$$\mathfrak{d}_z = 1+\mathfrak{r}_z,\qquad \mathfrak{d}_z' = \left\{1+\mathfrak{r}_z'\right\},$$

und setzt noch $e^{iv\int_{z_1'}^{z_2'}n_z c_z\,dz} = \mathfrak{c}_0$, so ist:

$$\left.\begin{aligned}\mathfrak{R}_\beta &= \left[\mathfrak{r}_\beta - \frac{1}{2}\,\psi_1 + \left\{\mathfrak{r}_\beta' + \frac{1}{2}\,\psi_1'\right\}\mathfrak{c}_0^2\right]\mathfrak{E}_\beta,\\ \mathfrak{R}_z &= \left[\mathfrak{r}_z - \frac{1}{2}\,\chi_1 + \left\{\mathfrak{r}_z' + \frac{1}{2}\,\chi_1'\right\}\mathfrak{c}_0^2\right]\mathfrak{E}_z,\\ \mathfrak{D}_\beta &= \mathfrak{d}_\beta\mathfrak{d}_\beta'\mathfrak{c}_0\mathfrak{E}_\beta,\\ \mathfrak{D}_z &= \mathfrak{d}_z\mathfrak{d}_z'\mathfrak{c}_0\mathfrak{E}_z.\end{aligned}\right\} \quad (16)$$

Wir haben die Formeln für die beobachtbaren Größen $\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{D}$ aufgestellt, indem wir die Differentialgleichung für $\zeta$ im ganzen Raume gültig annahmen und ihre Lösung aufgesucht dachten. In Wirklichkeit wird man praktischer die Differentialgleichung für die drei Gebiete gesondert aufstellen und lösen, um dann die drei Lösungen in $z_1 = z_1'$ und $z_2 = z_2'$ so zu verknüpfen, daß $A_1 B_1$ und $Y$, die wir in § 2 als überall stetig fanden (oder es gemäß den Grenzbedingungen der Maxwellschen Theorie sind), in diesem Punkte nicht springen. Unsere Formeln (16) sind aber unter der Bedingung abgeleitet, daß $B$ und $\frac{\partial B}{\partial z}$, $Y$ und $\frac{\partial Y}{\partial z}$ oder $B$, $\varepsilon(z)X$, $Y$ und $A$ stetig ineinander übergehen. Unsere Formeln setzen also voraus, daß $\varepsilon(z)$ im $z_1'$ und $z_2'$ nicht springt. Wollen wir also in den drei Gebieten partikuläre Lösungen aufstellen, so darf in den Punkten $z_1'$ und $z_2'$, wo wir sie aneinander knüpfen, $\varepsilon(z)$ nicht springen, wenn wir zum Schluß zu den Gleichungen (16) gelangen wollen.

4. Anwendung auf die Lippmannsche Farbenphotographie. Wir wollen auch diesmal unsere Formeln auf die Lippmannsche Farbenphotographie anwenden. In der früheren Arbeit war für die Dielektrizitätskonstante in der Schicht der Ansatz:

$$\left.\begin{aligned}\varepsilon(z) &= n_2^2 + 2\,\Delta\sin^2\frac{2\pi z}{\lambda_0} =\\ &= n_2^2 + \Delta - \Delta\cos\frac{4\pi}{\lambda_0}\,z\end{aligned}\right\} \quad (17)$$

zugrunde gelegt worden.

Wir werden uns der Wirklichkeit noch mehr nähern, wenn wir annehmen, daß die Lamellen in der Schicht nahe am Spiegel stärker ausgebildet sind, wie in einiger Entfernung von

ihm. Wir wollen diesmal unseren Ansatz erweitern, indem wir

$$\varepsilon(z) = n_2^2 + \Delta - \Delta e^{-\nu' z} \cos \frac{4\pi}{\lambda_0} z = n_2^2 + \varphi(z) \tag{18}$$

setzen.

Dann ist:

$$\psi(z) = \frac{\Delta}{c_2^2 n_2^2} + \frac{2\pi \Delta e^{-\nu' z}}{c_2 \lambda} \left\{ \frac{\cos \frac{4\pi}{\lambda_0} c_2 z + i \sin \frac{4\pi}{\lambda_0} c_2 z}{4\pi \left\{ \frac{c_2}{\lambda} - \frac{1}{\lambda_0} \right\} - i\nu'} + \frac{\cos \frac{4\pi}{\lambda_0} c_2 z - i \sin \frac{4\pi}{\lambda_0} c_2 z}{4\pi \left\{ \frac{c_2}{\lambda} + \frac{1}{\lambda_0} \right\} - i\nu'} \right\}. \tag{19}$$

Hierin ist $\lambda$ die Wellenlänge im Medium vom Brechungsindex $n_2$. $\nu'$ kann als eine sehr kleine Größe betrachtet werden. Dann liegt das Maximum von $\psi$ bei $\frac{c_2}{\lambda} - \frac{1}{\lambda_0} = 0$. Bei nicht verschwindendem $\nu'$ wird $\psi(z)$ nirgends unendlich, und unsere Annäherung bleibt überall gültig, so lange $\Delta$ hinreichend klein bleibt, so daß wir, wenigstens in qualitativer Hinsicht, auch für $c_2 \lambda_0 = \lambda$ den Zustand des reflektierten Lichtes ableiten können. Von der Diskussion des durchgehenden Lichtes wollen wir hier absehen, da sie in unserer Annäherung wenig Interessantes ergibt.

Wir wollen nun annehmen, daß die Schicht sich zwischen zwei gleichen Medien vom Brechungsindex $n_2$ befindet. Also $r_p = r_s = 0$. Ferner soll die Schicht so dick sein, daß $e_0^{-2}$ klein neben 1 ist. Dann ist:

$$\Re_p = -\frac{1}{2} \psi_1 \mathfrak{E}_p, \quad \Re_s = -\frac{1}{2} \chi_1 \mathfrak{E}_s =$$

$$= +\frac{1}{2} (c_2^2 - a_2^2) \psi_1 \mathfrak{E}_s.$$

Die reflektierte Intensität ist also proportional $|\psi_1|^2$. Dieselbe muß also nach unserer Voraussetzung stets klein neben eins sein; man kann also in einem gegebenen Falle aus der Bestimmung des „Reflexionsvermögens" einer Platte sogleich ersehen, inwieweit unsere Annäherung berechtigt ist.

Wir wollen annehmen, daß alle Farben bei der Reflexion am Quecksilber $\frac{1}{2}\lambda$ Phasenverzögerung erhalten; denn bei der Berechnung der Intensität kommt offenbar eine Abweichung von diesem Wert erst in quadratischen Gliedern vor.

Unsere Formeln ähneln den Ausdrücken, welche in der Dispersionstheorie eine Rolle spielen. Ebenso wie dort wollen wir auch hier zwei Gebiete unterscheiden. Betrachten wir zunächst $|\Re_p|^2$:

I. $\frac{c_2}{\lambda} - \frac{1}{\lambda_0}$ ist groß neben $\nu'$. Dann gilt:

$$\psi_1 = \frac{\Delta}{c_2^2 n_2^2} + \frac{\Delta 2\pi}{\lambda^2} \frac{2}{4\pi \left\{ \frac{c_2^2}{\lambda_2} - \frac{1}{\lambda_2^2} \right\}}, \tag{20}$$

also:

$$\frac{1}{4} |\psi_1|^2 = \frac{1}{4} |\Delta|^2 \left\{ \frac{1}{c_2^2 n_2^2} + \frac{\frac{4\pi}{\lambda^2}}{\frac{c_2^2}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda_0^2}} \right\}^2 = \frac{I_{rp}}{I_{ep}}.$$

II. $4\pi \left\{ \frac{c_2}{\lambda} - \frac{1}{\lambda_0} \right\} = \mu$ ist eine so kleine Größe, daß neben

$$\frac{1}{4\pi \left\{ \frac{c_2}{\lambda} - \frac{1}{\lambda_0} \right\} - i\nu'}$$

die zwei anderen Summanden fortbleiben können. Dann ist:

$$\frac{I_{rp}}{I_{ep}} = \frac{1}{4} |\psi_1|^2 = \frac{4\pi^2}{c_2^2 \lambda^2} \frac{|\Delta|^2}{\mu^2 + \nu'^2}. \tag{21}$$

Da diese Formel nur für ein kleines Spektralbereich gilt, ist für $\lambda^2$ ein Mittelwert $\lambda^2$ eingeführt.

Die Formel für $\frac{I_{rp}}{I_{ep}}$ ist ihrer Gestalt nach dieselbe wie die, welche man in der Dispersionstheorie für $2n^2\varkappa$ abzuleiten pflegt; es sei darum auf die bekannte Kurve für $2n^2\varkappa$ verwiesen.

Es ist bemerkenswert, daß die reflektierte Amplitude mit $|\Delta|$ und damit mit der einfallenden Energie proportional ist. Denkt man sich eine photographische Platte für alle Farben gleich empfindlich hergestellt und mit verschiedenen Frequenzen belichtet, so ist das Verhältnis der reflektierten Amplituden gleich dem Verhältnis der beim Belichten einfallenden Energie. Man erhält also keine exakte Wiedergabe von Mischfarben.

Das Maximum von $I_{rp}$ liegt bei $\frac{c_2}{\lambda} = \frac{1}{\lambda_0}$. Neigt man also die Platte, so daß $c_2$ verkleinert wird, so rückt das Maximum von $I_r$ zu kleineren Wellenlängen (wie es den neueren Beobachtungen, welche mit Ausschluß der Oberflächenwelle angestellt sind, entspricht); gleichzeitig wächst die Größe der reflektierten Intensität der $p$-Komponente.

Die Intensität der $s$-Komponente unterscheidet sich nur durch den Faktor $(c_2^2 - a_2^2)^2$. Wie man sieht, wird $I_{r_s} = 0$ bei $45^0$ Einfallswinkel. Die Schicht besitzt also einen Polarisationswinkel von $45^0$.

Der Polarisationszustand des reflektierten Lichtes ist gegeben durch:

$$\frac{\Re_s}{\Re_p} = -(c_2^2 - a_2^2), \qquad (22)$$

wenn $\mathfrak{E}_s = \mathfrak{E}_p$ angenommen ist. Das Licht bleibt also bei der Reflexion linear polarisiert. Geht man von senkrechter Inzidenz, wo das Azimut des reflektierten Lichtes parallel dem des einfallenden ist, zu größeren Einfallswinkeln, so dreht sich die Polarisationsebene der Einfallsebene zu, erreicht sie beim Polarisationswinkel ($45^0$) und tritt durch sie hindurch, um bei streifender Inzidenz der einfallenden wieder parallel zu sein. Genau das gleiche Verhalten ergibt sich bei der Reflexion an durchsichtigen Medien; wir erhalten in dem letzteren Falle die gleiche Formel wie (22), wenn beide Medien nahezu gleichen Brechungsindex haben: Es ist nämlich

$$\frac{\Re_s}{\Re_p} = -\frac{c_1 c_2 - a_1 a_2}{c_1 c_2 + a_1 a_2}$$

und

$$\lim_{n_1 = n_1} \frac{\Re_s}{\Re_p} = -(c_2^2 - a_2^2). -$$

Wir haben im vorhergehenden angenommen, daß die Dielektrizitätskonstante nach dem Kosinusgesetz mit etwas gedämpfter Amplitude variiert. In Wirklichkeit ist dieses vielleicht nicht genau erfüllt, und wir wollen überlegen, inwiefern dann unsere Resultate modifiziert werden. Jedenfalls wird aber die Konstitution, bis auf einen Dämpfungsfaktor $e^{-\nu' z}$, als periodisch mit $\frac{\lambda_0}{2}$ anzusehen sein; d. h. wir werden im allgemeinen Falle zu unserem Ansatz $\cos\frac{4\pi}{\lambda_0} z$ noch eine Summe von Gliedern $\cos h\frac{4\pi}{\lambda_0} z, h = 2, 3 \cdots$ hinzuzunehmen haben. Die Vorstellung z. B., daß in der Gelatine sich sehr dünne, merklich homogene Silberschichten mit spiegelnden Flächen befänden, würde ein spezieller Fall dieses Ansatzes sein.

Die neu hinzugekommenen Glieder werden offenbar in dem Ausdruck für $\psi$ das Auftreten von Summanden mit dem Faktor

$$\frac{1}{\frac{1}{\lambda} - h\frac{1}{\lambda_0} - i\nu'}$$

(senkrechte Inzidenz vorausgesetzt) und damit Maxima der Intensität bei $\lambda = \frac{\lambda_0}{h}$ veranlassen. Das reflektierte Licht wird also neben der Grundschwingung $\lambda_0$ noch die Oberschwingungen $\frac{\lambda_0}{h}$ enthalten. Aus der Beobachtung der Intensität dieser Oberschwingungen könnte man Schlüsse auf die Koeffizienten der Fourierreihe und damit auf die feinere Konstitution der Lamellen ziehen. Leider setzt aber die im Ultraviolett auftretende Absorption der Gelatine solchen Untersuchungen bald ein Ziel. Bisher ist nur nach der ersten Oberschwingung, und zwar vergeblich gesucht worden. Das erste Zusatzglied $\cos 2\frac{4\pi}{\lambda_0} z$ trat also in der Fourierreihe, welche $\varepsilon(z)$ darstellt, nicht auf.

Ist die Platte nur mit sichtbarem Licht bei der Aufnahme belichtet worden, so liegen alle Oberschwingungen im äußersten Violett oder Ultraviolett, ihr Auftreten wird also die Farbenwiedergabe der Platte nicht verschlechtern.

Alle erhaltenen Resultate lassen sich nämlich (wie schon in meiner früheren Arbeit gezeigt wurde) leicht auf Mischfarbenaufnahmen übertragen. Ist die Platte mit einer Reihe von Farben $\lambda_k$ belichtet, so wird man für $\varepsilon(z)$ von dem Ansatz ausgehen:

$$\varepsilon(z) = n_2^2 + \Sigma\Delta_k - \Sigma\Delta_k e^{-\nu_k' z} \cos\frac{4\pi z}{\lambda_k} \qquad (23)$$

(wobei der Einfachheit halber angenommen ist, daß alle Farben am Spiegel einen Schwingungsknoten hatten). Es ergibt sich dann:

$$\psi = \sum\frac{\Delta_k}{c_2 n_2} + \sum\frac{\Delta_k e^{-\nu_k' z}}{c_2 \lambda_k}\left\{\frac{e^{+i\frac{4\pi}{\lambda_k} z}}{4\pi\left|\frac{c_2}{\lambda} - \frac{1}{\lambda_k}\right| - i\nu_k'} + \frac{e^{-i\frac{4\pi z}{\lambda_k}}}{4\pi\left|\frac{c_2}{\lambda} + \frac{1}{\lambda_k}\right| - i\nu_k'}\right\}. \qquad (24)$$

Hierbei ist von Dispersion der Emulsion abgesehen.

Läßt man an einer solchen Platte monochromatisches Licht reflektieren, so wirken hierbei alle Schwärzungen, welche von den verschiedenen Wellenlängen beim Belichten hervorgerufen sind, mit, aber nicht in gleichmäßiger Stärke, sondern der Anteil einer jeden wird geregelt durch das Gewicht

$$\frac{\frac{1}{\lambda_k}}{4\pi\left(\frac{c_2}{\lambda} - \frac{1}{\lambda_k}\right) - i\nu'} \quad \text{bzw.} \quad \frac{\frac{1}{\lambda_k}}{4\pi\left(\frac{c_2}{\lambda} + \frac{1}{\lambda_k}\right) - i\nu'}.$$

Offenbar wird die Farbenwiedergabe um so besser sein, je größeres Gewicht die richtige Farbe gegenüber allen anderen Farben erhält. Es soll also $\nu'$ möglichst klein sein. Damit unsere Annäherung noch gilt, muß dann auch $\Delta_k$ klein sein. Wir werden im folgenden sehen, daß bei Mischfarbenaufnahmen gerade die Gültigkeit unserer Annäherung die Vorbedingung zu einer guten Farbenwiedergabe ist.

5. Berücksichtigung quadratischer Glieder: die Fehler in der Farbenwiedergabe der Lippmann-Platte. Wir wollen zu diesem Zweck auch noch quadratische Glieder in $\varphi(z)$ und $\psi(z)$ beibehalten und erst $\varphi^3(z)$ und $\psi^3(z)$ vernachlässigen. Den Ausdruck (19) für $\psi$ betrachten wir als eine erste Annäherung und nennen ihn jetzt $\psi_0(z)$. Wir finden eine weitere Annäherung, indem wir

$$\psi_1(z) = \psi_0(z) + \vartheta(z)$$

setzen und in die Differentialgleichung (8) einsetzen. Wir wollen diese Untersuchung aber von vornherein auf senkrechte Inzidenz und auf so dicke Platten, daß $e$ in (12) neben 1 fortbleiben kann, beschränken. Wir erhalten dann für $\vartheta(z)$ die Differentialgleichung:

$$i\nu\zeta_0\psi_0^2(z) = -2i\nu\zeta_0\vartheta(z) + \frac{d\vartheta(z)}{dz},$$

also:

$$\vartheta(z) = +i\nu\zeta_0 e^{+2i\nu\zeta_0 z}\int\psi_0^2(z)\,e^{-2i\nu\zeta_0 z}\,dz.$$

Und aus (12) folgt:

$$\mathfrak{R} = -\frac{1}{2}\left|\psi_{01} - \frac{1}{2}\psi_{01}^2 + \vartheta_1\right|^2. \quad (25)$$

Setzt man nun:

$$4\pi\left|\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda_k}\right| - i\nu' = N_k,$$

$$4\pi\left|\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\lambda_k}\right| - i\nu' = M_k$$

und

$$\sum_k \frac{\Delta_k}{n_2} = S,$$

da es ein Maß für die gesamte Schwärzung darstellt, und nimmt schließlich $\nu'$ als unabhängig von $\lambda$ an, so wird:

$$\left.\begin{aligned}\psi_0^2(z) = S^2 + 2S\sum_k \frac{\Delta_k e^{-\nu' z}}{\lambda_k}\left|\frac{e^{+i\nu_k z}}{N_k} + \frac{e^{-i\nu_k z}}{M_k}\right| + \\ + \sum_k\sum_k \frac{\Delta_k\Delta_k e^{-2\nu' z}}{\lambda_k\lambda_k}\left|\frac{e^{+i(\nu_k+\nu_k)z}}{N_k N_k} + \right. \\ \left. + \frac{e^{-i(\nu_k+\nu_k)z}}{M_k M_k} + \frac{e^{+i(\nu_k-\nu_k)z}}{N_k M_k} + \frac{e^{-i(\nu_k-\nu_k)z}}{N_k M_k}\right|\end{aligned}\right\} \quad (26)$$

Also:

$$\left.\begin{aligned}\vartheta(z) = \frac{1}{2}S^2 + 2S\sum_k \frac{\Delta_k e^{-\nu' z}}{\lambda_k}\left|\frac{e^{+i\nu_k z}}{N_k^2} + \right. \\ \left. + \frac{e^{-i\nu_k z}}{M_k^2}\right| + \\ + \sum_k\sum_k \frac{\Delta_k\Delta_k e^{-2\nu' z}}{\lambda_k\lambda_k}\left|\frac{e^{+i(\nu_k+\nu_k)z}}{N_k N_k N_{k+k}} + \right. \\ + \frac{e^{-i(\nu_k+\nu_k)z}}{M_k M_k M_{k+k}} + \frac{e^{+i(\nu_k-\nu_k)z}}{N_k M_k N_{k-k}} + \\ \left. + \frac{e^{-i(\nu_k-\nu_k)z}}{N_k M_k M_{k-k}}\right|.\end{aligned}\right\} \quad (27)$$

Diese Ausdrücke sind für $z = 0$ zu nehmen und in die Formel (25) für $R$ einzuführen.

Die ersten beiden Summanden sowohl in $\psi_0^2(z)$ wie in $\vartheta(z)$ werden die Farbenwiedergabe nicht stören. Der erste Term $S^2$ gibt nur einen für alle $\lambda$ konstanten Bruchteil zum reflektierten Licht, und dieser ist relativ zu den übrigen Gliedern sehr klein, da er nicht mit einem großen Faktor (wie etwa $N_k$ für $\lambda = \lambda_k$) multipliziert ist. Die zweiten Glieder ergeben Maxima bei $\lambda = \lambda_k$; diese Maxima sind aber proportional $\Delta_k$. Diese Glieder verstärken also nur die Wirkung.

Die dritten Terme dagegen ergeben Maxima z. B. bei $\lambda = \lambda_k$, aber die Größe des Maximums hängt in sehr verwickelter Weise von den übrigen $\Delta_k$ ab. Diese Glieder sind also imstande, falls sie zur Geltung kommen, die Farbenwiedergabe zu fälschen.

Außer den Maxima bei $\lambda = \lambda_k$ treten weitere Maxima bei $\frac{1}{\lambda_k} + \frac{1}{\lambda_k}$ auf, außer den Oberschwingungen, also noch die Summen und Differenzen der Grundfrequenzen. Falls die Platte nur mit sichtbarem Licht belichtet wurde, werden sie allerdings weniger schaden, da sie fast außerhalb des sichtbaren Spektrums liegen.

Bei reinen Spektralaufnahmen, wo alle $\Delta_k$ bis auf eins Null sind, kann offenbar die schädliche Wirkung nicht auftreten. Die Berücksichtigung der quadratischen Glieder führt nur auf das Vorhandensein von Oberschwingungen. Es ist dies vielleicht ein Grund mit, weshalb reine Spektralaufnahmen viel leichter zu erhalten sind als Mischfarbenaufnahmen.

Eine weitere Fehlerquelle besteht darin, daß die Schwärzung der Platte nicht genau proportional der aufgewandten Energie ist, so daß wir unseren Ansatz für $\varepsilon(z)$ zu erweitern haben:

$$\left.\begin{aligned}\varepsilon(z) = n_2^2 + \Sigma\Delta_k \sin^2\frac{2\pi}{\lambda_k}z + \\ + C\left[\Sigma\Delta_k \sin^2\frac{2\pi}{\lambda_k}z\right]^2 + \cdots,\end{aligned}\right\} \quad (28)$$

wenn wir für den Augenblick von der Dämpfung $\nu'$ absehen. $\varepsilon(z)$ läßt sich nun schreiben:

$$\varepsilon(z) = n_2^2 + n_2 S + n_2^2 C S^2 -$$

$$- \Sigma A_k (1 + 2CS) \cos \frac{4\pi}{\lambda_k} z + C \Sigma\Sigma A_h A_k$$

$$\left[\cos 4\pi\left(\frac{1}{\lambda_h} + \frac{1}{\lambda_k}\right) + \cos 4\pi\left(\frac{1}{\lambda_h} - \frac{1}{\lambda_k}\right)\right].$$

Setzen wir voraus, daß die Belichtung nur mit sichtbarem Licht stattgefunden hat und daß es nur auf die Farbenwiedergabe im sichtbaren Teil ankommt, so wird (vielleicht abgesehen von geringen Teilen der beiden Ränder des Spektrums) $A_{h-k} = A_{h+k} = 0$ sein, wenn $\lambda_h$ und $\lambda_k$ Wellenlängen des sichtbaren Spektrums sind. Bildet man dann $\psi_1$, so sieht man leicht, daß die Faktoren der einzelnen Glieder der Doppelsumme nie groß werden können. Es folgt daraus, daß dieses letzte Glied ebenso wie $S$ und $S^2$ die Farbenwiedergabe wenig stören werden.

Eine nicht ganz exakte Proportionalität zwischen Schwärzung und aufgewandter Energie, solange sich $\varepsilon(z)$ durch (28) darstellt, wirkt also nicht schädlich auf die Farbenwiedergabe ein, wenn man bei der Belichtung ultrarote und ultraviolette Strahlung ausschließt.

Wir haben bisher vorausgesetzt, daß die Lippmannsche Platte von der Schichtseite her betrachtet würde. Wir wollen zum Schluß noch überlegen, welche Abänderung diese Resultate erleiden werden, wenn man von der Glasseite her beobachtet.

Die Formeln (19), (26), (27) für $\psi_0(z)$, $\psi_0^2(z)$ und $\vartheta(z)$ bleiben dann gültig, nur hat $\nu'$ einen negativen Wert. Um die reflektierte Amplitude zu erhalten, hat man diese Funktionen für $z = l$ zu bilden. Ist $\nu' l$ hinreichend klein, d. h. durchsetzt die lamellare Struktur die gesamte Gelatineschicht, so wird zwar die von der Rückseite reflektierte Amplitude um $e^{-|\nu| l}$ schwächer sein, als die von der Vorderseite reflektierte, aber die Farbenwiedergabe wird nicht schlechter sein. Ja es kann bei Mischfarbenaufnahmen sogar günstiger sein, sie von der Glasseite zu betrachten, wenn nämlich $A_h$ so groß ist, daß $A_h^2$ nicht verschwindend klein ist. Denn bei Betrachtung von der Rückseite erhalten die störenden dritten Terme in (26) und (27) den Faktor $e^{-2|\nu| z}$, der ihre schädliche Wirkung herabdrückt. So fand z. B. H. Lehmann, daß Platten, welche mit drei monochromatischen Lichtbündeln belichtet waren, nur von der Glasseite gesehen, drei getrennte Maxima zeigten, von der Schichtseite aber nur ein kontinuierliches Band.

Ist indessen $\nu' l$ so groß, daß $e^{-|\nu| l}$ verschwindet, so hört überhaupt jede Farbenwirkung auf. Dies scheint bei Mischfarbenaufnahmen von Körperfarben, welche durch das Spektroskop betrachtet ein kontinuierliches Spektrum mit flachen Maxima zeigen, also bei der Aufnahme von Landschaften, stets der Fall zu sein. Hier ist nämlich die Schwärzung nach unserer Grundannahme gegeben durch:

$$2\int_{\lambda_1}^{\lambda_2} A(\lambda) \sin^2 \frac{2\pi}{\lambda} d\lambda = 2\int_{\lambda_1}^{\lambda_2} A(\lambda)\, d\lambda) -$$

$$- \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} A(\lambda) \cos \frac{4\pi}{\lambda} z\, d\lambda .$$

Da $A(\lambda)$ langsam variiert, $\cos \frac{4\pi}{\lambda} z$ für hinreichend große $z$ aber schnell um Null schwankt, so wird das zweite Integral sehr klein, und die periodische Struktur der Schicht verschwindet, zumal der photographische Prozeß die kleinsten Feinheiten verwischt[1]). Derartige Aufnahmen zeigen also von der Rückseite gesehen überhaupt keine Farben, wie es auch der Erfahrung entspricht. —

Wir haben im vorgehenden eine Theorie der Lippmannschen Farbenphotographie zu geben versucht. Die Grundannahme besteht darin, daß eine mit einer Farbe von der Wellenlänge $\lambda_0$ belichtete Platte eine Struktur zeigt, die durch eine Fourierreihe mit der Grundwellenlänge $\frac{\lambda_0}{2}$ dargestellt werden kann, und in der Gültigkeit der Maxwellschen Gleichungen. In dieser (wohl denkbar größten[2]) Allgemeinheit) ist das Problem nicht lösbar. Man kann indessen übersehen, daß bei der Aufnahme von Mischfarben (Landschaften, Früchte usw.) nur unter gewissen Bedingungen eine gute Farbenwiedergabe zu erwarten ist, nämlich nur dann, wenn die reflektierte Intensität relativ klein ist. Unter dieser Annahme kann man die Differentialgleichungen integrieren und gelangt für die reflektierten und durchgegangenen Amplituden zu den Formeln (16) und (19). Ihre Aussagen scheinen mit den Beobachtungen übereinzustimmen. Allerdings ist auch in dem behandelten Fall von einer exakten Farbenwiedergabe keine Rede, denn es werden keineswegs die Intensitäten der einzelnen Spektralbereiche in ihrem Verhältnis zueinander absolut richtig wiedergegeben. Vielmehr verhalten sich die reflektierten Intensitäten zueinander

1) Hiermit hängt auch zusammen, daß der Spiegel bei der Aufnahme sehr gut an der Schicht anliegen muß. Die eingehendere Diskussion der lamellaren Struktur an der Hand sehr schöner Mikrophotogramme findet sich bei H. Lehmann, S. 73 ff.

2) Solange man von der Beugung an dem Korn der Schicht absieht.

wie die Quadrate der entsprechenden Intensitäten im einfallenden Licht. Besteht das einfallende Licht aus einem kontinuierlichen Spektrum mit schwachen und breiten Maxima, wie es bei den in der Natur vorkommenden Körperfarben zumeist der Fall ist, so wirkt die eben besprochene Eigenschaft der Lippmannschen Photographie dahin, daß das reflektierte Licht diese Maxima ausgeprägter als das einfallende zeigt. Die Farben werden infolgedessen leuchtender erscheinen. In der Tat wird ja der hohe Glanz der wiedergegebenen Farben stets als ein Vorzug des Lippmannschen Verfahrens genannt.

Göttingen, Physikal. Institut, Math. Abt., 25. Januar 1914.

(Eingegangen 26. Januar 1914.)

## Elementare Theorie des Faradayschen Effektes.

Von Paul Selényi.

Nach dem Muster der bekannten Lorentzschen sog. elementaren Theorie des Zeemanschen Phänomens habe ich versucht, auch für die Theorie der magnetischen Rotationspolarisation eine solche elementar anschauliche Form zu finden, die das Wesen der Erscheinung richtig wiedergibt und den Vorteil besitzt, daß jeder Schritt der dabei angewendeten Betrachtungen sich auch physikalisch deuten läßt. Des Zusammenhanges wegen müssen wir erst vielfach Bekanntes wiederholen.

1. Eigene Kreisschwingungen eines Punktes. Es sei der Massenpunkt $m$ an seine Gleichgewichtslage durch eine elastische Kraft gebunden, die bei der Elongation 1 den Wert $\alpha^2$ hat; es sei $a$ die Amplitude der Bewegung (Radius des Kreises), $\omega$ die Winkelgeschwindigkeit. Sollen sich zentrifugale und elastische Kraft das Gleichgewicht halten, so muß

$$m a \omega^2 = a \alpha^2 \qquad (1)$$

sein, woraus sich die Frequenz der Eigenschwingungen zu

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{\alpha^2}{m}} \qquad (2)$$

ergibt[1]).

1) Vielleicht ist es nicht ganz uninteressant zu zeigen, wie auch die Mechanik der erzwungenen Kreisschwingungen (von welchen man durch Projektion sofort zu linearen Schwingungen übergehen kann) mit ganz elementaren Mitteln sich behandeln läßt, wenn man sich nur auf den stationären Bewegungszustand beschränkt.

Es sei wieder (Fig. 1) $a$ die Amplitude, $\delta$ die Phasendifferenz zwischen der Elongation und der erregenden Kraft $P$; $\beta\omega$ der der Geschwindigkeit proportionale Reibungswiderstand; $m$, $\alpha$ und $\omega$ haben die gleiche Bedeutung wie vorher. Die Bedingung des Gleichgewichts der radialen und tangentialen Kräfte lautet:

$$m a \omega^2 = a \alpha^2 - P \cos\delta$$
$$a \omega \beta = P \sin\delta .$$

Setzt man wieder

$$m \omega_0^2 = \alpha^2 ,$$

so kann man schreiben

$$-P \cos\delta = m a (\omega^2 - \omega_0^2)$$
$$P \sin\delta = a \omega \beta$$

und aus diesen folgen die zur Bestimmung von $\delta$ und $a$ zu benutzenden zwei Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{tg}\delta &= -\frac{\beta\,\omega}{m\,\omega^2 - \omega_0^2} \\ a &= \frac{P}{\sqrt{\omega^2\beta^2 + m^2(\omega^2-\omega_0^2)^2}} , \end{aligned}\right\} \qquad (I)$$

die wir also zugleich mit ihrer mechanischen Bedeutung erhielten.

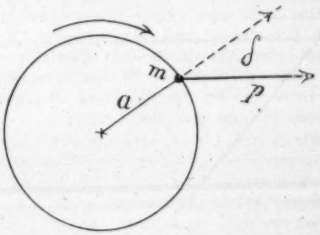



Fig. 1.

Wir wollen noch die Erscheinung der Resonanz etwas detaillieren. In diesem Falle ($\omega = \omega_0$) ergeben die Gleichungen (I)

$$\operatorname{tg}\delta = \infty , \quad \delta = \frac{\pi}{2} ,$$

die erregende Kraft steht rechtwinklig zu der jeweiligen Elongation und die Amplitude ist:

$$a = \frac{P}{\omega_0 \beta} .$$

In der Tat sind im Falle der Eigenschwingungen zentrifugale und elastische Kraft einander gleich, die äußere, erregende Kraft darf also keine radiale Komponente besitzen $\left(\delta = \frac{\pi}{2}\right)$ und da die Gleichheit dieser zwei Kräfte bei jedem Wert von $a$ vorhanden ist, so ist die Größe von $a$ allein durch die Bedingung bestimmt, daß Reibungswiderstand und erregende Kraft einander gleich sein müssen. — Ist ferner $\omega > \omega_0$, dann ist auch $m a \omega^2 > a \alpha^2$, die zentrifugale Kraft übertrifft die elastische; soll also das Gleichgewicht erhalten bleiben, dann muß $P$ von solcher Richtung sein, daß ihre radiale Komponente sich zu der elastischen Kraft addiere, d. h. es muß $\delta > \frac{\pi}{2}$ sein, der Punkt bleibt gegen die Kraft noch mehr als im Falle der Resonanz zurück; umgekehrt eilt er voraus, wenn $\omega < \omega_0$ ist, wie man es auch aus den Gleichungen (I) leicht folgern kann.

2. Zeemansches Phänomen. Hat der Punkt die elektrische Ladung $e$ und befindet er sich in einem longitudinalen magnetischen Feld von der Intensität $H$, so addiert sich zu der elastischen Kraft die elektrodynamische Wir-

kung des Feldes, anstatt (1) müssen wir daher schreiben

$$m a \omega^2 = a a^2 \pm \frac{e}{c} a \omega H, \qquad (3)$$

und daraus folgt in bekannter Weise die Änderung der Eigenfrequenz der Kreisschwingungen, d. h. das Zeemansche Phänomen.

In ganz analoger Weise erhalten wir eine elementare Theorie des Faradayschen Effektes, sobald wir eine elementare Ableitung der Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Kreisschwingungen besitzen.

3. Fortpflanzung von Kreisschwingungen längs einer Saite. Es sei (Fig. 2) $O, O_1, O_2 \ldots$ die Saite in ihrer Gleichgewichtslage,

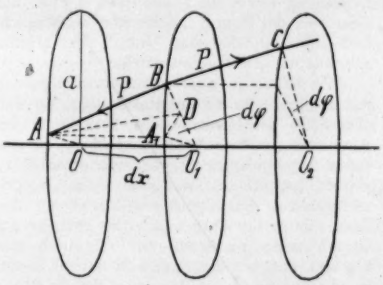



Fig. 2.

$ABC \ldots$ in einem Moment der Bewegung. Wir ersetzen die gleichmäßige Massenverteilung durch Massenpunkte $\varrho\, dx$ im gegenseitigen Abstand $dx$; es sei $d\varphi$ die Phasendifferenz zweier solcher Punkte, $P$ die die Saite spannende Kraft. Um die Bewegung der Saite zu bestimmen, drücken wir die Bedingung des Gleichgewichts der gesamten auf einen beliebigen Punkt $B$ wirkenden radialen und tangentialen Kräfte aus.

In tangentialer Richtung wirkt nur die tangentiale Komponente von $P$; im stationären Zustand heben sich aber die nach vorwärts und rückwärts gerichteten gleich großen $P a\, d\varphi/dx$-Komponenten gegenseitig auf.

In radialer Richtung wirkt einerseits die Zentrifugalkraft

$$\varrho\, dx\, a\, \omega^2,$$

andererseits die radiale Komponente der Kraft $P$ (die sie infolge der Ungleichheiten

$$A B O_1 \sphericalangle = C B O_1 \sphericalangle \mp \frac{\pi}{2}$$

besitzt). Diese Komponente hat die Größe

$$2P \frac{BD}{AB} = 2P \frac{BD}{dx},$$

da aber

$$BD = a - O_1 D = a - a \cos d\varphi = a \frac{d\varphi^2}{2}$$

ist, so erhalten wir für diese Komponente den Wert

$$P a \frac{d\varphi^2}{dx}$$

und die Bedingung des Gleichgewichts der Kräfte lautet

$$\varrho\, dx\, a\, \omega^2 = P a \frac{d\varphi^2}{dx}. \qquad (4)$$

Es ist aber

$$d\varphi = \omega\, dt = \omega \frac{dx}{v},$$

wenn wir mit $v$ die Fortpflanzungsgeschwindigkeit bezeichnen, und dies in die vorige Gleichung gesetzt gibt

$$\varrho\, dx\, a\, \omega^2 = P \frac{a \omega^2 dx}{v^2}, \qquad (5)$$

woraus endlich das bekannte Resultat

$$v = \sqrt{\frac{P}{\varrho}} \qquad (6)$$

folgt. Aus dieser Ableitung kann man vielleicht klarer als sonst hervortreten lassen erstens, daß die Bestimmung der Fortpflanzungsgeschwindigkeit eigentlich durch die Bestimmung der Phasendifferenz zweier Punkte geschieht, und zweitens, wie die Funktionsform (die Quadratwurzel) dadurch bedingt ist, daß die radiale Komponente von $P$ proportional dem Quadrat von $d\varphi$ wächst.

4. Faradayscher Effekt. Wir wollen jetzt jeden $\varrho\, dx$-Massenpunkt mit der elektrischen Ladung $\varepsilon\, dx$ versehen und die Saite in ein longitudinales magnetisches Feld von der Intensität $H$ bringen. Es sei der Rotationssinn z. B. ein solcher, daß die elektrodynamische Wirkung des Feldes nach dem Zentrum hin, also entgegen der Zentrifugalkraft gerichtet ist, dann muß — damit das Gleichgewicht der Kräfte erhalten bleibe — die radiale Komponente von $P$, also $d\varphi$, kleiner sein, dies ist aber mit einem Größerwerden der Fortpflanzungsgeschwindigkeit gleichbedeutend; ebenso vermindert sich die Fortpflanzungsgeschwindigkeit bei der entgegengesetzten Rotation. Unser Modell zeigt also tatsächlich den Faradayschen Effekt. Das vorher Gesagte in Gleichungen ausgedrückt lautet

$$\varrho\, dx\, a\, \omega^2 = P \frac{a \omega^2 dx}{v^2} \pm \frac{\varepsilon}{c} a \omega H\, dx \qquad (7)$$

$$v^2 \varrho\, \omega = P \omega \pm \frac{\varepsilon}{c} v^2 H$$

und in dem zweiten Glied

$$v^2 = \frac{P}{\varrho}$$

gesetzt und geordnet

$$v^2 = \frac{P}{\varrho}\left(1 + \frac{\varepsilon H}{\varrho\,\omega c}\right)$$

$$v = \sqrt{\frac{P}{\varrho}\left(1 \pm \frac{\varepsilon H}{2\varrho\,\omega c}\right)}, \qquad 8)$$

wo die Zeichen + und — auf die zwei entgegengesetzten Rotationen sich beziehen. Aus der Verschiedenheit der Geschwindigkeiten der zwei entgegengesetzt zirkular polarisierten Wellen folgt dann sofort die Drehung der Polarisationsebene linear polarisierter Wellen.

Durch Anbringen von Spiralfedern an den einzelnen Massenpunkten, d. h. durch Einführung von Eigenschwingungen, könnte man das Modell noch zu vervollständigen versuchen, um auch die Rotationsdispersion richtig wiederzugeben; dies wollen wir aber unterlassen.

Budapest, II. phys. Institut der Universität.

(Eingegangen 17. Januar 1914.)

## Über das Uran Y.

Von Otto Hahn und Lise Meitner.

Im Jahre 1911 hat G. N. Antonoff[1]) eine Arbeit veröffentlicht, in der er ein von ihm aufgefundenes Zerfallsprodukt des Urans beschrieb, das er Uran Y nannte. Die Substanz fand sich beim Uran X, wenn dieses nach der sog. „Eisenmethode" vom Uran abgetrennt wurde; sie konnte dagegen nicht beobachtet werden, wenn zur Abscheidung des Uran X Bariumsulfat verwendet wurde. Das nach der Eisenmethode abgetrennte Uran X zeigte anfänglich einen schnelleren Abfall, als der Halbwertszeit des Uran X (24,6 Tage) entspricht, wenn die Aktivitätsmessungen so aufgenommen wurden, daß die langsamen $\beta$-Strahlen zur Wirksamkeit gelangten. Wurden jedoch nur die durchdringenden $\beta$-Strahlen gemessen, so erfolgte der Abfall von Beginn an mit der Halbwertszeit des Uran X.

Antonoff schloß aus seinen Versuchen, daß das Uran Y nur langsame $\beta$-Strahlen aussendet, eine Halbwertszeit von 1,5 Tagen besitzt und sich nur in außerordentlich geringem Maße an der Gesamtaktivität des Uran X beteiligt.

Aus diesem letzteren Umstande wurde weiter geschlossen, daß das Uran Y in der Uranreihe seine Stellung weder zwischen Uran und Uran X, noch nach dem Uran X haben kann. Diese Resultate wurden auch noch durch direkte Versuche bestätigt, die Antonoff zu der Annahme führten, daß das Uran Y ebenso wie das Uran X unmittelbar aus dem Uran entsteht. Das Uran Y stellte nach Antonoff neben dem Radium C' das zweite Beispiel einer sog. radioaktiven Seitenlinie vor.

Die Antonoffschen Versuche wurden vor einigen Monaten von A. Fleck[1]) wiederholt, der aber die Existenz des Uran Y nicht bestätigen zu können meinte. Fleck führte die beobachtete schnellere Abnahme des Uran X auf geringe Verunreinigungen des Uranpräparats durch Thorium zurück.

Antonoff nahm daher seine früheren Versuche nochmals auf und hielt in einer kurzen Notiz seine in der ersten Arbeit dargelegten Resultate aufrecht[2]). In dieser Notiz erweitert er sogar seine früheren Befunde, indem er die Beteiligung des Uran Y auf etwa 2 Proz. der $\beta$-Strahlen des Uran X angibt und die Möglichkeit diskutiert, daß das Uran Y die Muttersubstanz des Aktiniums vorstellt.

Wir hatten in einer unlängst erschienenen Arbeit gleichfalls die Frage diskutiert, an welcher Stelle der Uranreihe die Abzweigung des Aktiniums stattfindet. Bei Versuchen, das daselbst vorgeschlagene Schema experimentell zu prüfen, beobachteten wir beim Uran Unregelmäßigkeiten, deren genauere Verfolgung uns dazu führte, der Frage nach der Existenz des Uran Y näher zu treten. Es sei gleich hier bemerkt, daß wir die Existenz des Uran Y einwandfrei nachweisen und insoweit also die Resultate von Antonoff bestätigen konnten. Allerdings fanden wir für die Halbwertszeit beträchtlich kürzere Werte und kamen auch bezüglich der chemischen Abscheidungsbedingungen zu etwas anderen Resultaten als Antonoff. Diese Abweichungen veranlaßten uns, eine eingehendere Untersuchung der Frage vorzunehmen, deren Resultate weiter unten beschrieben werden sollen. Nachdem unsere Versuche nahezu abgeschlossen waren, erschien eine Mitteilung von Soddy[3]), in der auch die Existenz des Uran Y bestätigt wird. Wegen der geringen Effekte kann Soddy keine genaueren Daten angeben, doch betont er, daß die Halbwertszeit zwischen 24 und 36 Stunden liegen dürfte, und zwar näher zu dem Wert von 24 Stunden.

### 1. Nachweis der Existenz von Uran Y.

20 g wasserfreies Urannitrat wurden in Wasser gelöst, mit ca. 1 ccm einer 5proz. Eisenchloridlösung versetzt und mit Ammoniak das Uran mit dem Eisen gefällt. Durch Zusatz von überschüssigem Ammonkarbonat wurde das Uran

1) G. N. Antonoff, Phil. Mag. (6) **22**, 419, 1911.

1) A. Fleck, Phil. Mag. (6) **25**, 710, 1913.
2) G. N. Antonoff, Phil. Mag. (6) **26**, 1058, 1913.
3) F. Soddy, Phil. Mag. (6) **27**, 215, 1914.

wieder in Lösung gebracht, das ungelöst gebliebene Eisen heiß abfiltriert, getrocknet und gemessen. Das Eisen enthielt den größten Teil des Uran $X$. Um dieses ganz quantitativ abzutrennen, wurde die Ammonkarbonatlösung durch Säurezusatz zersetzt, der sauren Lösung erneut $Fe$ zugesetzt und das Eisen wieder in der angegebenen Weise gefällt. Dieser Vorgang wurde so oft wiederholt, bis die Aktivität der Eisenfällung praktisch gleich Null war. Dazu waren im allgemeinen 4—5 Fällungen notwendig.

Das nachfolgende Zahlenbeispiel gibt den Gang einer solchen Abtrennung des Uran $X$ wieder.

| Eisenfällung | $\beta$-Aktivität in willkürlichem Maße |
|---|---|
| 1 | 225 |
| 2 | 55,5 |
| 3 | 21,6 |
| 4 | 5,7 |
| 5 | 1 |

Auf diese Weise erhielt man also ein vollständig Uran $X$-freies Uranpräparat. Wegen der kurzen Lebensdauer des Uran $Y$ gegenüber der des Uran $X$ wird sich der Nachweis des Uran $Y$ neben diesem um so leichter gestalten, je kürzer man die Zeit der Nachbildung dieser beiden Produkte im Uran wählt. Wir haben bei unseren Versuchen Ansammlungszeiten gewählt, die zwischen 5 und 50 Stunden variierten. Dann wurde genau so wie oben angegeben eine Eisenfällung in der Uranlösung ausgeführt. Die so erhaltenen Präparate wurden in zwei verschiedenen geschlossenen Elektroskopen zur Messung gebracht. Der Boden des einen war mit 0,01 mm, der des anderen mit 0,07 mm Aluminium bedeckt. In dem letzteren wurden also nur durchdringende $\beta$-Strahlen gemessen, während eventuelle $\alpha$-Strahlen des Urans in keinem der beiden Elektroskope zur Wirksamkeit kommen konnten. Die Abnahme der Aktivität der durchdringenden $\beta$-Strahlen erfolgte immer mit der Halbwertszeit des Uran $X$; dagegen zeigte die weichere $\beta$-Strahlung in allen Fällen anfänglich eine zu schnelle Abnahme.

Die Messungen wurden so lange fortgesetzt, bis die Aktivitätsabnahme mit der Halbwertszeit von Uran $X$ erfolgte, was im allgemeinen nach 5—6 Tagen der Fall war. Durch Subtraktion der Uran $X$-Abfallskurve von der experimentell gemessenen ergab sich die Abfallskurve des schneller zerfallenden Körpers. Wir erhielten hierbei wesentlich kürzere Halbwertszeiten als Antonoff. Wir mußten deshalb an die Möglichkeit denken, daß die ganze Erscheinung durch Spuren von Thorium im Ausgangsmaterial vorgetäuscht sei, wie Fleck es für seine Versuche annahm. Diese Möglichkeit läßt sich auf einem sehr einfachen Wege ausschließen. Das Uran $X$ hat nämlich bekanntlich dieselben chemischen Eigenschaften wie Thorium und Radiothor und läßt sich in keiner Weise von diesen Körpern trennen. Enthält also das Uran tatsächlich Thorium, so muß bei der Abscheidung des Uran $X$ das Thorium und Radiothor mit abgetrennt werden. Da nun, wie wir gesehen haben, das Uran $X$ durch die wiederholten Eisenfällungen quantitativ vom Uran entfernt wird, so muß gleichzeitig auch das vorhandene Thorium und Radiothorium quantitativ abgetrennt werden. Wenn man daher ein und dasselbe Uranpräparat in gewissen Zeitintervallen in der oben beschriebenen Weise behandelt, so muß die schnell zerfallende Substanz, die man hierbei abscheidet, falls sie ein Thoriumprodukt ist, immer geringer werden und nach der Zeit, in der das etwa beim Uran verbliebene Thorium $X$ zerfallen ist, verschwunden sein. Rührt die Aktivität aber nicht von Thoriumverunreinigungen her, sondern handelt es sich tatsächlich um ein Zerfallsprodukt des Urans, so müssen die Ausbeuten unverändert bleiben.

Um diesen Punkt zu prüfen, haben wir beispielsweise am 15. Dezember 20 g Uran quantitativ von Uran $X$ befreit. Von demselben Präparat wurden am 16., 17., 18., 19. Dezember, 5. und 6. Januar Abtrennungen gemacht. Alle so erhaltenen Präparate ergaben die schnell abfallende Substanz in angenähert konstanter Menge, wenn die Dauer der verschieden gewählten Ansammlungszeit in Rücksicht gezogen wurde. Da nach 22 Tagen nur noch 1,5 Proz. von der ursprünglich vorhandenen Thorium $X$-Menge übrig sein können, so ist damit ausgeschlossen, daß der in Frage stehende schnell zerfallende Körper Thorium $B$ sei. Allerdings konnten wir ein spurenweises Vorhandensein von Thorium $B$ nachweisen, das sich darin äußerte, daß die ersten Zerfallskurven von Uran $Y$ immer etwas kürzere Halbwertszeiten ergaben, als die zu späteren Zeiten aufgenommenen. Auf diesen Punkt wollen wir weiter unten noch zurückkommen.

### 2. Halbwertszeit des Uran Y.

Wir geben im folgenden eine Anzahl Abfallskurven von Uran $Y$. Als Abszissen sind die Zeiten in Stunden, als Ordinaten die Logarithmen der Aktivitäten in willkürlichem Maße aufgetragen. Die Kurven sind aus den experimentell aufgenommenen Kurven in der Weise gewonnen, daß das nach Zerfall des Uran $Y$ übrig bleibende Uran $X$ entsprechend in Abzug gebracht wurde.

Die wiedergegebenen Kurven gehören verschiedenen Gruppen von Versuchen an. Kurve 1 wurde mit einem Präparat aufgenommen, das

Anfang Dezember aus 10 g Urannitrat gewonnen war. Für die Aufnahme der Kurven 2a—2e dienten die 20 g Urannitrat, die am 15. Dezember 1913 zum erstenmal vom Uran $X$ befreit wurden. Die Kurven 3a—3d sind mit einem Präparat gewonnen, zu dessen Herstellung am 5. Januar 1914 50 g Urannitrat verarbeitet wurden. Die Ansammlungszeit für das Uran $Y$ im Uran wurde zwischen 5 und 50 Stunden variiert, in den meisten Fällen aber wurden etwa 20 Stunden gewählt. Die Kurven in den Gruppen sind chronologisch geordnet, beispielsweise entsprechen 1, 2a und 3a den zuerst hergestellten Präparaten der betreffenden Gruppe, d. h. das zugehörige Uranpräparat war einen Tag vor der Herstellung zum erstenmal von Uran $X$ befreit worden. Kurve 2e und 3d entsprechen Präparaten, die 22 Tage bzw. 16 Tage nach der ersten Abtrennung des Uran $X$ gewonnen wurden. Die dazwischen liegenden Kurven entsprechen intermediären Zeiten.

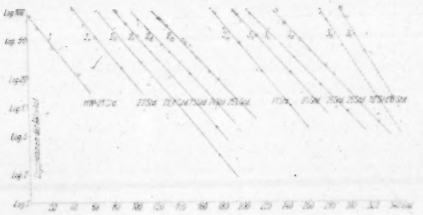


Fig. 1.

Die Halbwertszeiten schwanken im Maximum zwischen rund 21 und rund 26 Stunden; obwohl dem einzelnen Wert wegen der geringen Stärke der untersuchten Präparate keine sehr große Genauigkeit zugeschrieben werden kann, zeigt eine eingehendere Betrachtung deutlich, daß die Werte zwischen den angegebenen Grenzen nicht regellos verteilt sind, sondern einen systematischen Gang aufweisen, indem die den späteren Präparaten zugehörigen Kurven die längeren Halbwertszeiten besitzen. Die Erklärung hierfür ist zweifellos darin zu suchen, daß, wie schon oben erwähnt wurde, das Urannitrat durch Spuren von Thorium verunreinigt wird. Die ersten Uran $X$-Fällungen enthalten demgemäß immer etwas Thorium $B$, dessen Anwesenheit die für das Uran $Y$ gemessene Halbwertszeit herunterdrückt.

Um diesen Punkt noch direkt zu prüfen, haben wir den Uran $Y$-Präparaten eine geringe Menge Blei zugesetzt und dieses von dem Uran $Y$ zu trennen versucht. In einem Fall wurde das Blei mit $H_2S$ gefällt; im Filtrat wurde das $Fe$ gefällt. Da Thorium $B$ Bleieigenschaften besitzt, muß es bei dem ausgefallenen Blei sein. Wenn das Blei beim Ausfallen gar kein Uran $Y$ mitreißen würde, müßte die Abklingung der Bleifällung mit der Halbwertszeit des Thorium $B$ (10,6 Stunden) erfolgen. Jedenfalls ist aber zu erwarten, daß die Abnahme des Bleiniederschlags rascher erfolgt als die des zugehörigen Eisenniederschlags.

Die erhaltenen Resultate bestätigen diese Erwartung. Kurve 3b′ gibt die Abklingung des Schwefelwasserstoffniederschlags, dessen Aktivität etwa 40 Proz. der Aktivität des Eisenniederschlags betrug, ein Beweis, daß das Blei einen Teil des Uran $Y$ und Uran $X$ mitgerissen hatte.

Kurve 3b entspricht der zugehörigen Eisenfällung. Die aus 3b′ sich ergebende Halbwertszeit beträgt 18 Stunden, während 3b mit einer Halbwertszeit von 24 Stunden abfällt. Möglicherweise entspricht dieser Wert noch nicht vollständig der wirklichen Halbwertszeit des Uran $Y$, da die Bleifällungen mit $H_2S$ in schwach saurer Lösung nicht quantitativ sind.

Bei einem zweiten Versuch wurde deshalb die Bleitrennung in anderer Weise ausgeführt. Die Lösung des Uran $Y$ und Uran $X$ wurde wieder mit geringen Mengen Blei versetzt und außerdem etwa 0,4 mg Thoriumnitrat zugegeben, um eine Adsorption des Uran $Y$ + Uran $X$ an das Blei zu verhindern. Das Blei wurde nun mit Schwefelsäure und im Filtrat das Eisen + Thorium mit $NH_3$ ausgefällt. Die Aktivität des Bleisulfatniederschlags betrug jetzt nur $^1/_{10}$ der des Eisenniederschlags, obgleich die Schicht eine wesentlich dünnere war, und die Abklingung erfolgte mit etwa 16 Stunden Halbwertszeit, wie die Kurve 3c′ erkennen läßt. Die außerordentlich geringe Aktivität brachte es mit sich, daß man die Abfallskurve nicht über sehr große Zeitintervalle verfolgen konnte. Der Abfall der zugehörigen Eisenfällung ist in 3c wiedergegeben, er erfolgt mit einer Halbwertszeit von etwa 26 Stunden. Die Kurven 2e und 3d ergeben auch Halbwertszeiten zwischen 25 und 26 Stunden, so daß die kürzeren Halbwertszeiten wohl sicher auf die spurenweise Anwesenheit von Thorium $B$ zurückzuführen sind. Die Abklingungskurven der von Thorium $B$ befreiten Präparate ergeben im Mittel als Halbwertszeit 25,5 Stunden. Wir glauben nicht, daß der mittlere Fehler hierbei mehr als 0,5 Stunden beträgt.

Eine ungefähre Schätzung der Thorium $B$-Mengen, die für die beobachtete Verminderung der Halbwertszeit des Uran $Y$ nötig sind, kann man durch Ausprobieren sehr leicht ermitteln. Nimmt man beispielsweise an, daß die gemessene Aktivität zu 80 Proz. vom Uran $Y$ und zu 20 Proz. vom Thorium $B + C$

herrühre, und konstruiert für ein derartiges Gemisch unter der Voraussetzung, daß sich Uran Y in 25 Stunden zur Hälfte umwandelt, die Zerfallskurve, so fällt diese während der ersten Zeit mit einer Halbwertszeit von 21,5 Stunden ab. Da die 20 Proz. Thorium $B+C$-Aktivität wegen der gewählten Versuchsanordnung zum großen Teil von den $\alpha$-Strahlen des Thorium C herrührt, so ist die $\beta$-Aktivität des Thorium $B+C$, die ja allein mit der Aktivität des Uran Y verglichen werden kann, höchstens von der Größenordnung von 1 Proz. Die Verunreinigung des Urans durch die entsprechende Menge Thorium ist natürlich noch viel kleiner, und zwar etwa von der Größenordnung $^1/_{10}$ Promille, da sich Uran Y an der $\beta$-Aktivität des Urans im Gleichgewicht mit Uran X nur zu einigen Prozenten beteiligt. Diese Beteiligung läßt sich ohne weiteres berechnen, wenn einmal die Halbwertszeit des Uran Y bekannt ist. Beispielsweise betrug für das Präparat der Kurve 2e die Gesamtaktivität zur Zeit Null in willkürlichen Einheiten 33,5, wovon 9,1 Einheiten dem Uran Y, 24,4 dem Uran X zuzuschreiben waren. Diese Aktivität hatte sich in 15 Stunden aus dem Uran gebildet, entsprach also, wenn man die Halbwertszeit des Uran Y zu 25 Stunden annimmt, 34,2 Proz. der Gleichgewichtsmenge von Uran Y und 2 Proz. von der des Uran X. Dem Gleichgewicht entspricht also für Uran Y die Aktivität 26,45, für Uran X die Aktivität 1220, d. h. also, die Beteiligung des Uran Y an der Gesamtaktivität beträgt 2,1 Proz. Der angeführten Berechnung liegt die Annahme zugrunde, daß Uran X und Uran Y bei ihrer Herstellung aus Uran entweder vollständig abgetrennt werden oder wenigstens immer in gleichem Verhältnis, daß sie demnach sich bei den angewendeten chemischen Reaktionen identisch verhalten. Das ist auch tatsächlich der Fall, denn wie noch später dargelegt wird, scheinen sie überhaupt identische chemische Eigenschaften zu besitzen.

Selbstverständlich gilt der Wert von 2,1 Proz. nur für die von uns gewählten Meßbedingungen und ist naturgemäß auch von der Schichtdicke der untersuchten Präparate abhängig.

Es wurden auch Anstiegskurven mit ursprünglich Uran X- und Uran Y-freiem Uran aufgenommen. Das Uran wurde durch 5 bis 6 Eisenfällungen gereinigt, dann als Hydrat mit Ammoniak gefällt, ausgewaschen und rasch getrocknet. Das getrocknete Präparat wurde pulverisiert, mit Chloroform angerieben und auf ein Aluminiumblech aufgestrichen, dessen Durchmesser 21 cm betrug. Die aufgestrichenen Mengen variierten zwischen 1,7 g und 3,3 g. Die Präparate wurden in einem entsprechend großen Elektroskop untersucht, das mit 0,01 mm Aluminium abgeschlossen war, und zwar wurden die Präparate unbedeckt und mit 0,1 mm Aluminium bedeckt gemessen. Im ersteren Falle mißt man die Strahlen des Uran Y noch mit, im letzteren Falle nur die durchdringenden $\beta$-Strahlen des Uran X. Die Resultate eines solchen Versuchs sind in Fig. 2 wiedergegeben.

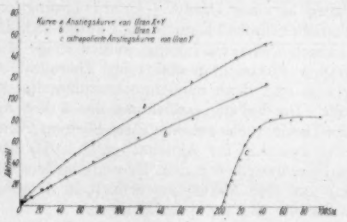


Fig. 2.

Kurve a entspricht dem unbedeckten Präparat, Kurve b dem bedeckten. Die Kurve b zeigt den Verlauf, der der direkten Bildung von Uran X aus Uran entspricht.

Kurve a läßt deutlich eine anfänglich schnellere Zunahme erkennen, die von der Nachbildung des kurzlebigen Uran Y herrührt. Diese beiden Anstiegskurven sprechen wohl dafür, daß Uran Y nicht zwischen Uran X und Uran steht. Kurve c wurde in der Weise gewonnen, daß die Werte der Kurve b auf die Absorption der Uran X $\beta$-Strahlen in 0,1 mm $Al$ durch Multiplikation mit dem experimentell bestimmten Faktor 1,22 korrigiert und dann von den entsprechenden Werten der Kurve a abgezogen wurden. Kurve c repräsentiert also die Anstiegskurve für die Bildung des Uran Y aus Uran. Diese Kurve gibt eine Halbwertszeit von 19 bis 20 Stunden. Da es sich hier um Differenzwerte handelt, deren Absolutwerte sehr klein sind, ist die Übereinstimmung mit dem zu erwartenden Wert von 25 — 26 Stunden ziemlich befriedigend.

### 3. Die chemischen Eigenschaften des Uran Y.

Bei allen frisch hergestellten Uran Y-Präparaten entsprach die anwesende Uran Y-Menge immer der Dauer der gewählten Ansammlungszeit. Schon dieser Umstand macht es sehr wahrscheinlich, daß Uran Y und Uran X denselben Reaktionen folgen. Gegen diese Annahme sprach allerdings der Befund von Antonoff, daß Uran X, das mit $BaSO_4$ niedergerissen wird, das Uran Y nicht enthält. Wir haben daher diesen Versuch wiederholt, kamen aber zu dem entgegengesetzten Resultat wie Antonoff. Bei gleicher Länge der

Ansammlungszeit enthielten die Bariumsulfatfällungen denselben Prozentsatz Uran $Y$ wie die Eisenfällungen. Dies steht auch in Übereinstimmung mit den Befunden von Soddy[1]).

Wir haben auch auf direktem Wege den Nachweis erbracht, daß Uran $Y$ und Uran $X$ chemisch identisch sind. Uran $X$ läßt sich bekanntlich von Thorium nicht trennen. Wir haben daher in einer Uran $X$ + Uran $Y$-Lösung eine charakteristische Thoriumfällung ausgeführt. Der schwach salzsauren Lösung wurden einige Milligramm Zirkonnitrat und 1 mg Thornitrat zugesetzt und dann mit Ammoniumthiosulfat gefällt. Die Fällung enthielt nur das Zirkon und das Thorium, das gesamte Eisen blieb im Filtrat. Eine Prüfung der Aktivität ergab, daß über 96 Proz. derselben in dem Thiosulfatniederschlag war und ihre Abklingung erfolgte in derselben Weise wie die der Eisenfällungen.

Wasserstoffsuperoxydfällungen, die ja auch charakteristisch für Thorium sind, sind ohne Zugabe leicht fällbarer Thoriummengen nicht gut auszuführen. Immerhin haben einige Versuche in dieser Richtung ergeben, daß sich das Uran $Y$ bei der Wasserstoffsuperoxydfällung wie Uran $X$, also Thorium verhält.

Die angeführten Tatsachen scheinen zur Genüge zu beweisen, daß Uran $Y$ dieselben chemischen Eigenschaften besitzt wie Uran $X$.

Das vierwertige Uran $Y$ muß also aus dem Uran durch eine $\alpha$-Strahlenumwandlung entstehen. Doch läßt sich vorläufig nicht entscheiden, ob es aus dem Uran 1 neben dem Uran $X$ oder aus dem Uran 2 neben dem Ionium entsteht. Könnte man die $\alpha$-Strahlen von Uran 1 und Uran 2 auf Grund ihrer verschiedenen Reichweiten getrennt zählen, so ließe sich diese Frage entscheiden, da im ersten Fall die Zahl der $\alpha$-Strahlen von Uran 1 sich etwas größer ergeben müßte als die Zahl der $\alpha$-Strahlen von Uran 2.

### Zusammenfassung der Resultate.

1. Die Existenz von Uran $Y$ wird einwandfrei nachgewiesen.

2. Uran $Y$ emittiert langsame $\beta$-Strahlen und besitzt eine Halbwertszeit von $25{,}5 \pm 0{,}5$ Stunden.

3. Uran $Y$ besitzt die chemischen Eigenschaften des Uran $X$, also des Thoriums.

4. Uran $Y$ entsteht entweder aus Uran 1 neben dem Uran $X$ oder aus Uran 2 neben dem Ionium.

1) F. Soddy, l. c.

Berlin-Dahlem, Kaiser Wilhelm-Institut für Chemie.

(Eingegangen 30. Januar 1914.)

## Versuche über die Wirkung elektrischer Entladungen in Helium auf Radiumemanation.

Von L. Bruner[1]) und E. Bekier.

Als Fundamentaltatsache der Radiochemie gilt die vollkommene Unbeeinflußbarkeit des Zeitmaßes der radioaktiven Umwandlungen. Sichtet man jedoch das darüber vorhandene Beobachtungsmaterial, so wird man zugeben müssen, daß es in Anbetracht der großen Wichtigkeit dieses Gegenstandes doch an Versuchen fehlt, die nach verschiedenen Richtungen und unter verschiedenen Versuchsbedingungen festzustellen suchen, in welchen Grenzen und unter welchen Bedingungen die Unbeeinflußbarkeit als sichergestellt betrachtet werden kann. Die meisten Versuche beschäftigen sich mit dem Temperatureinfluß und auch teilweise mit dem Druckeinfluß auf radioaktive Umwandlungen. Nach den ersten grundlegenden Versuchen von Becquerel, Rutherford und P. Curie[2]) waren es besonders H. W. Schmidt[3]) und A. S. Russell[4]), die sich ausführlich mit dem Temperaturkoeffizient (in den Grenzen bis 1300° der Zerfallsgeschwindigkeit in der Reihe *Ra*-Radiumemanation — *RaC* befaßt haben.

Die Verfasser kommen zu dem Schluß, daß in den von ihnen untersuchten Temperaturgebieten die Temperatur die Zerfallsgeschwindigkeit nicht beeinflußt hatte.

Von anderen physikalischen Faktoren, die die Zerfallsgeschwindigkeit beeinflussen könnten, ist nur noch unseres Wissens die Wirkung von Kathodenstrahlen[5]) und Röntgenstrahlen[6]) versucht worden, und zwar auch mit negativem Ergebnis.

Von der Betrachtung ausgehend, daß nach allgemeinen Prinzipien der chemischen Mechanik eine radioaktive Umwandlung, die unter Abspaltung von $\alpha$-Teilchen erfolgt, wie etwa

$$\text{Radiumemanation} \rightarrow RaA + \alpha$$

durch Konzentrationsvermehrung des Reaktionsprodukts, d. i. von geladenen Heliumatomen, zur teilweisen Umkehrung am ehesten gebracht werden konnte, haben wir versucht, die Wirkung von Helium auf Radiumemanation unter Einfluß von elektrischen Entladungen festzustellen.

Der dazu verwendete Apparat (Figur) be-

1) Prof. Dr. L. Bruner, einer von den Verfassern der vorliegenden Mitteilung ist am 5. Dezember 1913 gestorben. Manuskript dieser Mitteilung war in der endgültigen Form noch vor dem Tode des Prof. L. Bruner geschrieben.

2) Rutherford, Radioaktivität 1907.

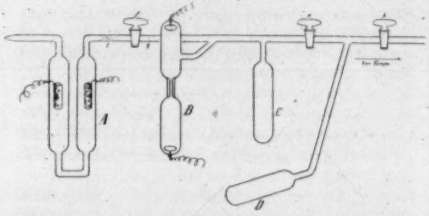
3) Diese Zeitschr. **9**, 113 u. 816, 1908.

4) Proc. Roy. Soc. **86** (A), 240—257, 1912.

5) Chem. Centralblatt 1909, I, 62.

6) Arch. de Genève **25**, 26, 1908.

stand im wesentlichen aus dem Entladungsrohr *A*, das mit Aluminiumelektroden versehen worden war, aus spektralem Kontrollrohr *B* und einem mit Holzkohle gefüllten Behälter *C*. Die Emanation, die aus $^1/_{40}$ mg $RaBr_2$ ausgekocht und über $KOH$ und $P_2O_5$ geleitet wurde, wurde




in dem Rohr *A* kondensiert, noch bevor der Apparat bei *g* zusammengeblasen wurde. Dann wurde bei zugedrehtem Hahn *f* bei *g* zusammengeblasen und der ganze Apparat, indem *A* mit flüssiger Luft gekühlt wurde, bis zum Verschwinden von Kathodenstrahlen evakuiert. Nun wurde *f* wieder zugesperrt und das Helium aus Thorianit und Kaliumbichromat nach Erdmann[1]) in *D* entwickelt. Indem *C* in flüssiger Luft gekühlt wurde, wurde das Helium von den absorbierten Gasen gereinigt und in *B* die Reinheit des Heliumspektrums nachgeprüft. Nachdem in *B* nur reines Heliumspektrum zu sehen war, wurde durch Öffnen des Hahnes *f* das Gas auch in das Entladungsgefäß *A* hineingeleitet. Um dann während der ganzen Versuchsdauer vollkommen sicheren Abschluß zu erhalten, wurde bei *j* abgeschmolzen und nun zu den Entladungen geschritten, wobei die Verengung des *A*-Röhrchens zur Kontrolle der Reinheit des Heliumspektrums diente. Es zeigte sich, daß bei längerer Versuchsdauer das Heliumspektrum immer verwischter wird. Eine Erscheinung, auf die bereits Baly[2]) aufmerksam macht.

Die Messung wurde in der Weise ausgeführt, daß, nachdem bereits das Gleichgewicht: Emanation bis *RaC* eingetreten ist, die Radioaktivität mit einem β-Elektroskop mit Hilfe von β- und γ-Strahlen in bekannter Weise gemessen wurde. Dann wurde die Entladung mit Hilfe eines Induktoriums von 10 cm Funkenlänge eine Zeitlang durchgeleitet, die Intensität der Radioaktivität wieder gemessen und mit der theoretischen unter Benutzung der Zeitkonstante der Radiumemanation $\lambda = 0{,}000125$ Min.$^{-1}$ verglichen.

Das Resultat der Versuche war bis jetzt ein negatives. Es zeigten sich keine Veränderungen in der Intensität der Radioaktivität, wie dies der Fall sein müßte, wenn die Zeitkonstanten des radioaktiven Zerfalls verändert würden.

Es seien auszugsweise einige unserer Versuchsprotokolle mitgeteilt:

| Versuch | Skalenteile pro Minute gefunden | Skalenteile berechnet[1]) |
|---|---|---|
| 1. | 83,11 | — |
| | 10 Min. Entladungen | |
| nach | 45 Min. 81,67 | 82,65 |
| „ | 105 Min. 79,48 | 80,62 |
| | 15 Min. Entladungen | |
| „ | 45 Min. 79,48 | 79,04 |
| 2. | 5,92 | — |
| | 60 Min. Entladungen | |
| nach | 132 Min. 5,88 | 5,81 |
| „ | 223 Min. 5,73 | 5,72 |
| | 2 Stunden Entladungen | |
| „ | 169 Min. 5,54 | 5,61 |
| „ | 1046 Min. 4,86 | 4,86 |

1) Unter „berechnet" stehen immer die Werte, die aus dem oben unmittelbar vorher gemessenen berechnet worden sind, somit z. B. der Wert 80,62 aus 81,67 berechnet wurde.

Krakau, Physikalisch-chemisches Universitäts-Laboratorium, Juni 1913.

(Eingegangen 31. Januar 1914.)

1) A. Classen, Ausgewählte Methoden der analytischen Chemie 1903, II. Bd., S. 536.

2) Baly, Spektroskopie, S. 311. Berlin 1908.

## Zur Theorie des Glimmstroms. I.

Von Ragnar Holm.

In der Theorie des Glimmstroms gibt es bekanntlich eine Anzahl fundamentaler Fragen, die auf ihre Lösung warten. Es gibt z. B. noch keine allgemein angenommene Erklärung des Zustandekommens des negativen Glimmlichtsaumes, auch keine für die Beziehung zwischen Stromstärke und Potentialgradient in der positiven Glimmsäule. Einige neue Arbeiten von J. Franck und G. Hertz[1]) über die Reflexion der Elektronen an Molekülen zwingen zu anderen Vorstellungen über die Bewegungen der Elektronen, als man in den bisher entwickelten Theorien des Glimmstroms vorfindet. Bei dieser Sachlage scheint es erlaubt, über einen Ver-

1) J. Franck u. G. Hertz, Verh. d. Deutsch. phys. Gesellsch. 15, 373, 1913 und diese Zeitschr. 14, 1115, 1913.

such zu berichten, die Glimmstromerscheinung mit Berücksichtigung der neuesten experimentellen Ergebnisse zu behandeln. Die Theorien, die ich in einer Serie Aufsätze, deren dieser der erste ist, gebe, ermöglichen es, viele von den jetzt noch ungeklärten Fragen einheitlich zu behandeln, und wenn auch einige der hier aufgestellten Hypothesen noch einer Richtigstellung bedürfen, so kann doch erwartet werden, daß dieser Versuch einer Theorie des Glimmstroms eine Anregung zur Weiterarbeit auf diesem Gebiete zu geben vermag.

Unter den eigenen Beobachtungen, die in der vorliegenden Arbeit benutzt werden, hat Verfasser einen Teil im Göttinger physikalischen Institut gemacht und schon größtenteils publiziert[1]), einen anderen Teil bei verschiedenen Gelegenheiten im Phys.-chem. Laboratorium der Firma Siemens & Halske in Berlin dank des freundlichen Entgegenkommens des Herrn Dr. H. Gerdien ausführen können. Den letztgenannten Beobachtungen habe ich allerdings aus mehreren Gründen im allgemeinen nur einen provisorischen Charakter geben können.

## § 1. Die positive Glimmlichtsäule.

### Allgemeines.

Die positive Säule ist ein recht selbständiges Gebilde. Während das negative Glimmlicht an die geraden Bahnen der Kathodenstrahlen gebunden ist[2]) und eventuellen Krümmungen des Entladungsrohrs nicht folgen kann, ist es für den Habitus der positiven Säule recht gleichgültig, ob die Strombahn durch Krümmungen des Rohres teilweise sogar in entgegengesetzter Richtung zu dem Gradient im Felde der Elektrodenladungen zu liegen kommt. Die Farbe und die eventuelle Schichtung der Glimmsäule sind sichtbar unabhängig von allmählich verlaufenden Krümmungen des Entladungsrohrs. Dasselbe gilt, wie ich durch Potentialmessungen an Sonden geprüft habe, angenähert auch für den Potentialgradienten. Zwei Messungen an ungeschichteten Säulen in einem 8 mm weiten Rohr gaben den Gradienten 44,2 bzw. 79,5 Volt/cm in einem geraden Rohrteil, während gleichzeitig in einem Teil des Rohres, wo dessen Krümmungsradius 6 cm betrug, die Werte 43 bzw. 76,2 Volt/cm gefunden wurden. Diese Unabhängigkeit der positiven Säule von der Richtung ihrer Bahn bedeutet, daß die Säule längs ihrer ganzen Länge Raumladungen besitzt, die ihr Feld so einstellen, daß der Potentialgradient und der Stromvorgang in einem gleichmäßig dicken Rohre überall dieselben bleiben. In dieser Hinsicht ähnelt der Stromvorgang in der Glimmsäule dem Vorgang in einem Leitungsdraht.

Schon diese Tatsache läßt verstehen, daß der Strom in der positiven Säule nicht direkt vom Felde der Elektrodenladungen erweckt wird. Die Entstehung des Glimmstroms dürfte also so vonstatten gehen, daß zuerst an den Elektroden Ionisation eintritt. Diese Ionisation verschafft die Möglichkeit, eine größere Ladung in der Richtung der Kraftlinien zu verschieben. Gleichzeitig verändert sich das Feld. Man kann sich so leicht vorstellen, wie durch Ladungsverschiebungen in Übereinstimmung mit den Bedingungen für die Entwicklung der Entladungsbahn, die durch die Rohrwände gegeben sind, das Feld die nötige endgültige Form bekommt. Der gleichmäßige Gradient ist natürlich eine Anpassung an das überall gleiche Leitvermögen der Säule genau so, wie es der Fall in einem Leitungsdraht ist.

Wenn wir so von der Gleichmäßigkeit in der positiven Glimmsäule sprechen, so sehen wir natürlich von der periodisch wiederkehrenden Ungleichmäßigkeit innerhalb der einzelnen eventuellen Schichten ab. In der geschichteten Säule zeigt sich die Gleichmäßigkeit in der Gleichwertigkeit der verschiedenen Schichten, der ersten ausgenommen. Eine gute Demonstration ausgeprägter Gleichwertigkeit der Schichten geben die Beispiele A, B und C in meiner Abh. R. H. Seite 17 bis 19. Diese Beispiele zeigen auch, wie vollständig unabhängig die negativen Gebiete des Glimmstroms von der Länge der positiven Säule, d. h. in den gegebenen Fällen von der Schichtanzahl sind, wenn diese nur größer als 2 oder 3 ist. Man sieht z. B. aus dem Beispiel A, Seite 17, wie bei konstant gehaltener Stromstärke der Elektrodenabstand von 169 mm auf 367 mm und die Schichtenanzahl von 2 bis 13 vergrößert werden konnte, ohne daß der Kathodenfall, die Entfernung des pos. Säulescheitels von der Kathode, die Schichtenpotentiale und die Schichtenlängen sich um sicher zu konstatierende Bruchteile eines Prozents änderten.

Dies kann natürlich auch als eine Demonstration für die Tatsache dienen, daß das Feld in den verschiedenen Glimmstromteilen hauptsächlich von den Ladungen in diesen Teilen bestimmt wird, und nur gewissermaßen indirekt von den Ladungen anderer Teile. Es handelt sich dabei um Volumenladungen. Die Ladun-

1) R. Holm, Abhandl. der Königl. Gesellsch. der Wissensch. zu Göttingen, math.-phys. Kl., Neue Folge Bd. IV, No. 2, 1908; diese Abhandlung wird in dem Folgenden der Kürze halber mit R. H. bezeichnet.

2) Ich werde in später erscheinenden Abschnitten treffende Beweise für diese übliche Auffassung geben.

gen der Glaswände spielen eine untergeordnete Rolle. Äußere leitende Mäntel der Rohre haben sehr wenig Einfluß. Wenn die Rohrwand innen leitend gemacht wird, wird die leuchtende Entladungsbahn allerdings dünner, und gleichzeitig damit verkürzen sich die Schichtlängen, so wie in engeren Rohrteilen. Die allgemeine Art der Entladung verändert sich aber nicht, und die eintretende Veränderung deutet nur darauf, daß sich in der äußeren Gasschicht Volumenladungen aufrecht halten, die das Gasinnere vor dem Felde der leitenden Wand schützen. Da diese äußere Gasschicht eine gewisse Dicke haben muß, ist es klar, daß die eigentliche Strombahn etwas verengt wird[1]).

Bekanntlich gibt es Fälle, wo die Glimmentladung gegen Annäherung geerdeter Leiter empfindlich ist. R. Reiger[2]) hat solche „empfindlichen Entladungen" sehr eingehend untersucht und kommt zu dem Schluß, daß sie immer intermittierend sein dürften. Die Empfindlichkeit erklärt sich als eine Art Kapazitätswirkung. An die Unabhängigkeit der positiven Säule von der Größe des Kathodenfalles sei hier nur erinnert.

## § 2. Theoretisches über den Stromvorgang in der positiven Glimmsäule, besonders in der ungeschichteten.

Das Leuchten in der positiven Glimmsäule gibt kund, daß dort Ionisation stattfindet. Denn nach Beobachtungen von Gehrcke und Seeliger[3]) und dem Verfasser (§ 5) werden nur dann Gase von Elektronen zum Leuchten erregt, wenn diese wenigstens eine gewisse Minimalgeschwindigkeit, die nicht kleiner als die kleinste Ionisationsgeschwindigkeit ist, besitzen. Es wäre denkbar, daß das Leuchten auch durch häufiges Bombardement seitens weniger schneller Elektronen erregt werden könnte. Ich habe aber gefunden (vgl. § 5), daß jedenfalls bei gewissen Stromdichten, die in der positiven Glimmsäule vorkommen können, ein Leuchten in solcher Weise nicht zustande kommt. Es ist zu bemerken, daß das hauptsächliche Leuchten der Säule bei mäßigen Stromstärken nicht diejenige Farbe hat, die von Elektronen erregt wird, welche gerade die kleinsten lichterzeugenden Geschwindigkeiten besitzen. Elektronen mit den in Frage kommenden Geschwindigkeitspotentialen ionisieren recht häufig[1]). Das Leuchten der Säule beweist also, daß in der Glimmsäule eine beträchtliche Ionisation stattfindet. Diese Ionisation muß für die Leitfähigkeit der Säule von wesentlicher Bedeutung sein.

Aus der im vorigen Paragraphen demonstrierten Gleichwertigkeit der verschiedenen Teile der positiven Glimmsäule folgt jetzt weiter, daß in dem stationären Zustand in der Säule eine die Ionisation kompensierende Wiedervereinigung stattfinden muß, und zwar müssen in jedem Teil der kontinuierlichen und innerhalb jeder vollständigen Schicht der geschichteten Säule sich die Ionisation und die Wiedervereinigung gerade aufheben. Der Potentialgradient in der Glimmsäule muß also immer eine solche Größe haben, daß er Gleichgewicht zwischen Absorption und Ionisation gestattet, wodurch die Größe dieses Gradienten in jedem einzelnen Fall eindeutig bestimmt wird.

Eine Theorie der Glimmsäule hat nun vor allen Dingen folgende Eigenheiten zu erklären: 1. Die Tatsache, daß ein Gefälle gleich der Ionisationsspannung in der Glimmsäule erst auf eine Strecke von 5 bis 10 freien Elektronenweglängen entfällt; 2. die bekannte Abnahme des Potentialgradienten mit wachsender Stromstärke; 3. die Schichten und 4. die Schichtpaare. Es ist von vornherein nicht zu erwarten, daß eine derartige Erklärung ohne einige neue Hypothesen aufgestellt werden kann. Da es mir nun gelungen ist, mit sehr naheliegenden und einfachen Hypothesen eine recht leistungsfähige Theorie zu schaffen, hoffe ich, daß diese der Wahrheit nicht sehr entfernt liegt.

Grundlegend für meine Auffassung über die Bewegung der Elektronen sind einige Arbeiten von J. Franck[2]) und J. Franck zusammen mit G. Hertz[3]). In Übereinstimmung mit diesen

1) Gehrcke hat die Verengung der Strombahn bei leitenden Wänden beobachtet. Gehrcke, Ann. d. Phys. 15, 509, 1904. Verfasser hat es in der Weise gemacht, daß er einen magnetisch beweglichen, mit einem Schlitz versehenen *Al*-Zylinder von der Anodenseite über die Entladung gezogen hat. Die Veränderung der Entladung konnte ich durch den Schlitz beobachten. Sobald bei Wasserstoffüllung ein so großer Teil der positiven Säule sich innerhalb des Zylinders befand, daß in ihm ein Potentialfall von etwa 370 Volt vorkommen würde, schaltete sich der Strom auf den *Al*-Zylinder über. Die Summe vom Kathodenfall und Anodenfall am *Al*-Zylinder blieb dann etwa 250 Volt, solange dieser als Nebenschluß für den Strom diente, wenn er auch weiter vorgeschoben wurde, und der Strom sich etwas änderte.

2) R. Reiger, Sitzber. d. Phys. Med. Soz. in Erlangen 37, 23, 1905.

3) E. Gehrcke und R. Seeliger, Verh. d. Deutsch. phys. Ges. 14, 335, 1023, 1912.

1) Kossel fand, daß langsame Elektronen (200 Volt) bei etwa jedem dritten gaskinetischen Stoß ionisieren (Ann. d. Phys. 37, 405, 1912). Aus den von Franck und Hertz publizierten Kurven (diese Zeitschr. 14, 1117, 1913) und mit Hilfe der von diesen Herren gegebenen Theorie (Verh. d. Deutsch. phys. Gesellsch. 16, 12, 1914) kann man auf etwa eine Ionisation für jeden fünften Stoß seitens eines gerade ionisierungsfähigen Elektrons schließen.

2) J. Franck, Jahrbuch der Radioaktivität 9, 235, 1912.

3) J. Franck und G. Hertz, Verh. d. Deutsch. phys. Gesellsch. 15, 373, 1913.

Arbeiten haben wir anzunehmen, daß die Elektronen an Molekülen unelastische Reflexionen erleiden. Der Grad der Unelastizität ist im allgemeinen um so höher, je langsamer die Elektronen sind. Neben reflektierenden Stößen haben wir im Falle kleiner Geschwindigkeiten auch mit Stößen zu rechnen, nach welchen das Elektron am Molekül für eine Zeit haften bleibt. Dank der Unelastizität der Stöße und des Klebenbleibens gelangen in schwachen Feldern (und in unedlen Gasen) keine oder fast keine Elektronen zu Ionisationsgeschwindigkeiten. Wenn aber das Potentialgefälle auf die mittlere freie Weglänge einen gewissen von der Gasart abhängigen Minimalbetrag übersteigt, dürfte ein großer Prozentsatz der Elektronen auf ihren Zickzackwegen zwischen den Molekülen eine allmählich wachsende Geschwindigkeit und schließlich Ionisationsgeschwindigkeit erlangen können.

Ich muß nun als eine Art Lemma einen Beweis dafür einschieben, daß die Elektronenabsorption in der Glimmsäule mit größter Wahrscheinlichkeit zuerst durch Moleküle geschieht und nicht direkt in Wiedervereinigung mit positiven Ionen besteht. Dies folgt daraus, daß Stöße zwischen im Felde beweglichen Elektronen und Ionen so selten stattfinden, daß sie für den Stromvorgang keine Bedeutung haben können. Es genügt diese Behauptung durch folgendes Beispiel zu stützen.

Wir betrachten die Glimmsäule einer Entladung in Luft von 1 mm Druck in einem 2 cm weiten Rohr. Die Stromstärke möge 5 Milliampere betragen. Das Potentialgefälle in der Glimmsäule beträgt unter diesen Voraussetzungen etwa 30 Volt/cm. Die Einheitslänge (1 cm) von der Säule enthält dabei etwa $1{,}2 \cdot 10^{17}$ Moleküle und wird sekundlich von rund $3{,}2 \cdot 10^{16}$ Ionen und Elektronen durchströmt, worunter $p \cdot 3{,}2 \cdot 10^{16}$ positive Ionen. Die Geschwindigkeit der positiven Ionen können wir nach Angaben von J. Franck[1]) schätzen. Für normale Gasionen in trockener Luft von Zimmertemperatur und Atmosphärendruck finden wir die Beweglichkeit etwa $u = 1{,}4$ cm/sec für 1 Volt/cm. In verdünnter Luft haben die Ionen eine größere Beweglichkeit, als die für sogenannte normale Ionen geltende. Nehmen wir an, daß sie denselben Diffusionskoeffizienten haben wie Luftmoleküle, so erhalten wir laut Francks Angaben (Seite 251) etwa $u = 9$ cm/sec für 1 Volt/cm bei 760 mm Druck, d. h. die mittlere Ionengeschwindigkeit wird $2 \cdot 10^3$ cm/sec für 30 Volt/cm bei 1 mm Druck.

1) J. Franck, Jahrbuch der Radioaktivität **9**, 249, 251, 1912.

Es sind also in der Einheitslänge der Glimmsäule auf einmal anwesend

$$\frac{p \cdot 3{,}2 \cdot 10^{16}}{2 \cdot 10^5} = 1{,}6 \cdot 10^{11} \cdot p \text{ positive Ionen}^1).$$

Nun ist $p$ höchstens gleich $\frac{1}{2}$, d. h. in der betr. Glimmsäule befindet sich im Mittel unter $\frac{3}{2} \cdot 10^6$ Moleküle höchstens etwa 1 pos. Ion. Da sowohl Moleküle als Ionen den Elektronen gegenüber als annähernd stillstehend betrachtet werden können, käme also auf $\frac{3}{4} \cdot 10^6$ Zusammenstöße eines Elektrons mit Molekülen höchstens ein einziger Zusammenstoß mit einem Ion, d. h. auf eine Wegstrecke des Elektrons von 0,7 km würde im Mittel höchstens nur ein einziger Zusammenstoß mit einem Ion stattfinden. Dies gilt allerdings nur unter der Voraussetzung, daß die Wirkungssphäre der Ionen den Elektronen gegenüber gleich der Wirkungssphäre der Moleküle ist. Sie ist natürlich in Wirklichkeit größer zu schätzen wegen der elektrostatischen Anziehung. Um eine Vorstellung von der Größenordnung dieser Anziehung zu geben, erwähne ich, daß ein Elektron mit 10 Volt Geschwindigkeitspotential zur Trabantenbewegung um ein einwertiges Ion herum von dessen Feld nur dann gezwungen wird, wenn es mit diesem Geschwindigkeitspotential in weniger als 0,14 μμ Entfernung von dem Ionenzentrum vorbeifliegt. Ich erwähne auch, daß die Kraft des Ionenfeldes den Wert 10 Volt/cm in etwa 1 μ Entfernung vom Ionenzentrum hat. Der Wirkungsradius des Ions ist also offenbar langsameren Elektronen gegenüber größer zu schätzen als schnelleren gegenüber. Gegenüber Elektronen ohne Anfangsgeschwindigkeit tritt ein Ion in der behandelten positiven Glimmsäule mit einem Wirkungsradius auf, der auch auf der Seite, wo das Hauptfeld dem Ionenfeld entgegenwirkt, die Größenordnung 1 μ besitzt, während der Wirkungsradius gegenüber Elektronen mit einigen Volt Geschwindigkeitspotential kaum wesentlich größer zu schätzen ist als der Molekülradius. Es ist nun zu bemerken, daß die Vergrößerung des Ionenradius bis auf 1 μ die Häufigkeit der Stöße

1) Wenn man die elektrostatische Wirkung solcher Ionenmengen berechnet, so erhält man viel zu große Kraftwerte, wenn nicht vorausgesetzt wird, daß die Anzahl auf einmal pro ccm anwesender positiver und negativer Gebilde bis auf weniger als 1 Proz. gleich sind. Die freien Elektronen dürften wegen ihrer großen Geschwindigkeit und infolgedessen kleiner Dichte wenig zu den statischen Feldern beitragen. Es folgt also, daß die positive Säule annähernd gleiche Mengen positive und negative Ionen enthält.

gegen Ionen auf das $10^3$fache vergrößern würde, so daß also für langsame Elektronen die Stoßfrequenz gegen Ionen mit der Stoßfrequenz gegen Moleküle vergleichbar würde.

Laut der jetzt durchgeführten Überlegung gelangt man zu folgender Theorie für die Elektronenabsorption in der positiven Glimmsäule:

Hypothese A: Die Absorption relativ langsamer Elektronen zerfällt in zwei Stufen. Die erste Stufe umfaßt das Haftenbleiben eines vorher bewegten Elektrons. Dieses Haftenbleiben geschieht, wegen der überwiegenden Anzahl Stöße gegen Moleküle, hauptsächlich an Molekülen, welche dabei zu negativen Ionen werden[1]). Die zweite Stufe ist die Anziehung des vollständig gebremsten Elektrons von einem positiven Ion und die „Wiedervereinigung" mit diesem[2]).

Es folgt aus der Hypothese A, daß die Häufigkeit $H$ (per Sekunde und cm³ berechnet) der Elektronenabsorption in der positiven Säule annähernd eine Funktion von der Form

$$H_1 = P_1 (\mathfrak{E}.\lambda) . j \text{ ist,}$$

wo $j$ die Elektronenstromdichte und $P_1$ eine von der Gasart und dem Potentialgefälle $(\mathfrak{E}.\lambda)$ per mittlere freie Elektronenweglänge $\lambda$ abhängige Funktion ist, die abnimmt, wenn $\mathfrak{E}.\lambda$ steigt.

Die Ionisationshäufigkeit $H_2$ wird auch eine derartige Funktion sein

$$H_2 = P_2 (\mathfrak{E}.\lambda) . j,$$

wo aber $P_2$ mit steigendem $\mathfrak{E}.\lambda$ wächst.

Die Bedingung des stationären Zustandes ist

$$H_1 = H_2,$$

d. h. $P_1 (\mathfrak{E}.\lambda) = P_2 (\mathfrak{E}.\lambda)$,

eine Gleichung, die offenbar immer eine Lösung hat, und die befriedigt wird, wenn das Potentialgefälle per mittlere freie Elektronenweglänge $\mathfrak{E}.\lambda$ einen gewissen von dem Rohrdurchmesser, dem Druck und der Stromdichte unabhängigen Wert hat.

Das Gefälle $\mathfrak{E}.\lambda$ ist aber tatsächlich von den aufgezählten Größen abhängig, und zwar in dem Sinne, daß $\mathfrak{E}.\lambda$ sinkt, wenn der Rohrdurchmesser[3]) oder die Stromdichte[4]) wächst. Die Abhängigkeit vom Druck ist recht eigenartig.

Diese Abhängigkeit der Größe $\mathfrak{E}.\lambda$ dürfte nicht ohne eine neue Hypothese erklärt werden können. Die neue Hypothese muß drei Forderungen erfüllen.

Die erste Forderung lautet: erklären, weshalb $\mathfrak{E}.\lambda$ mit steigender Stromdichte abnimmt.

Die zweite Forderung lautet: erklären, weshalb eine Vergrößerung des Druckes der Funktion $\mathfrak{E}.\lambda$ gegenüber gewissermaßen gleichwertig mit einer Verkleinerung der Stromdichte ist, so daß $\mathfrak{E}.\lambda$ mit grober Annäherung eine Funktion von dem Quotienten Stromdichte/Druck ist[1]).

Mit wachsendem Durchmesser folgt eine seitliche Ausdehnung der hauptsächlich aus Ionen bestehenden Ladungsschichten[2]) in der Glimmsäule. Eine solche Ausdehnung würde, konstante Ladungsdichte vorausgesetzt, eine Vergrößerung des „Potentialgefälles" mitführen. Da aber das Potentialgefälle tatsächlich sinkt, so entsteht für die neue Hypothese die dritte Forderung, ein Abnehmen der Ionenbildungshäufigkeit bei wachsendem Rohrdurchmesser zu erklären. Die Abnahme der Ionenbildungshäufigkeit muß durch eine Verminderung der Ionisationshäufigkeit $H_2$ und eine gleichzeitige Verminderung der Größe $H_1$ zustande kommen.

Diesen drei Forderungen gerecht wird folgende provisorische Hypothese $E$: Ein Teil der Stoßenergie der Elektronen wird in eine Strahlung umgesetzt, die bewirken kann, daß die die Strahlung absorbierenden Moleküle veredelt werden in dem Sinne, daß sie von den stoßenden Elektronen weniger Energie für andere Zwecke als Ionisation abnehmen[3]), so daß

1) Das Vorhandensein negativer Ionen in der Glimmsäule wurde oben aus anderen Gründen wahrscheinlich gemacht. Vgl. die letzte Note auf Seite 244.

2) Dank der großen Wirkungssphäre der Ionen gebremsten Elektronen gegenüber dürften die Ionen die meisten haftenden Elektronen wirklich zur Wiedervereinigung heranziehen, so daß die Häufigkeit des Haftens ziemlich gleich der Häufigkeit der Wiedervereinigung wird.

3) Vgl. W. Matthies und H. Struck, Verh. d. Deutsch. phys. Gesellsch. **14**, 100, Fig. 6, 1912.

4) Ein sehr bekanntes Verhalten, vgl. Winkelmanns Handbuch, auch die genannte Abhandl. von Matthies und Struck.

1) Bei Matthies und Struck, loc. cit., finden sich mehrere Beispiele für diese Wirkung des Druckes. So z. B. nehmen die Kurven Fig. 3, S. 97, Formen an, welche größeren Stromdichten entsprechen, wenn man zu kleineren Drucken geht. Eine in reinen Gasen zu erwartende Zunahme von $\mathfrak{E}\lambda$ mit steigendem Druck ist aber nicht beobachtet worden, wahrscheinlich, weil diese von einem anderen Phänomen verdeckt wird. Mit zunehmendem Druck wird nämlich meistens die prozentuale Verunreinigung durch „klebrige" Dämpfe kleiner, wodurch eine Abnahme der Funktion $P_1$ und also auch eine Verminderung von $P_2$ und $\mathfrak{E}\lambda$ bedingt wird. In dieser Abnahme der prozentualen Verunreinigung hat man vielleicht auch die Ursache dafür zu suchen, daß, wie W. Wien (Ann. d. Phys. **39**, 519, 1912) gezeigt hat, die Anzahl kinetischer Weglängen zwischen zwei Umladungen von Kanalstrahlen mit dem Druck steigt, vorausgesetzt natürlich, daß die Verunreinigung für die Umladungshäufigkeit von wesentlicher Bedeutung ist.

2) Vgl. § 1.

3) Daß die Elektronen im allgemeinen nur einen kleinen Teil ihrer kinetischen Energie zur Ionisation verwenden, ist längst bekannt. Die Ursache der Tatsache, daß nicht alle Stöße eines ionisierungsfähigen Elektrons zur Ionisation führen, hat man nach Lenard darin zu suchen, daß nur Treffer, die irgendwie ausgezeichnet sind, Ionisation bewirken können. — Es ist wohl durchaus wahrscheinlich, daß ein Molekül mit recht geringem

also durch die Wirkung der genannten Strahlung der Nutzeffekt der Elektronenstöße für die Ionisation vergrößert wird. Den Effekt der angenommenen Strahlung nenne ich den $E$-Effekt.

Wenn die Stromdichte wächst, wird die den $E$-Effekt erregende Strahlung dichter, und infolgedessen werden die Moleküle stärker beeinflußt und das Gas wird veredelt, wodurch offenbar eine Abnahme des notwendigen Potentialgefälles bewirkt wird. Die erste Forderung ist somit befriedigt. Es ist nun von vornherein wahrscheinlich, daß die einzelnen Moleküle im Mittel weniger beeinflußt werden, je größer die Anzahl der Moleküle ist, auf die sich die wirkende Strahlung verteilen muß. Daraus folgt, daß in Übereinstimmung mit der zweiten Forderung ein Wachsen des Druckes im entgegengesetzten Sinne wie ein Wachsen der Stromdichte auf den $E$-Effekt wirkt.

Auch der dritten Forderung wird Genüge geleistet, denn eine Vergrößerung des Rohrdurchmessers führt auch zur Verdichtung der Strahlung und zu einem Anwachsen des $E$-Effekts, insofern damit eine Vergrößerung der Anzahl strahlender Zentren pro Längeeinheit des Rohres verbunden ist, und zwar gilt dies, solange die betr. Strahlung nicht schon längs eines Teiles des Rohrdurchmessers vollständig absorbiert wird.

Beachtet man, daß der $E$-Effekt die Ionisierungsarbeit nicht vermindern kann und daß er in der Glimmsäule sich selbst entgegenwirkt, indem es seine Tätigkeit mit sich bringt, daß weniger kinetische Energie der Elektronen in Strahlung umgesetzt wird, und daß die Elektronen auch wahrscheinlich längere Strecken, ohne Strahlung zu erzeugen, durchlaufen dürfen, so wird es begreiflich, daß der Gradient $\mathfrak{E}$ bzw. $\mathfrak{E}:\lambda$ bei wachsender Stromdichte sich asymptotisch einem gewissen Minimum nähert.

Da die Stärke des $E$-Effekts angenähert eine Funktion des Quotienten Stromdichte/Gasdruck, welche mit diesem Quotienten wächst, sein sollte, so ist es klar, daß die Annäherung des Gradienten an seinen Grenzwert bei desto kleineren Stromdichten geschehen muß, je niedriger der Druck ist. Dies wird durch Beobachtungen von Matthies und Struck[1]) bestätigt. Man beachte ihre Figuren 3 und 4.

Ich möchte darauf aufmerksam machen, daß diskutiert werden muß, ob die Hypothese $E$ durch folgende Annahme ersetzt werden kann: An den Rohrwänden werden Elektronen getrennt und wiedervereinigt, und zwar in prozentual größerer Menge, je enger das Rohr ist, und in prozentual kleinerer Menge, je größer die Stromstärke ist, weil bei größeren Stromstärken eine die Elektronen kräftiger abstoßende negative Wandladung aufrecht erhalten wird.

In ganz reinen Edelgasen werden nach Franck und Hertz (l. c.) auch die langsamen Elektronen von den Molekülen vollkommen elastisch reflektiert. Die oben geschilderte Absorption langsamer Elektronen fällt also in solchen Gasen fort. Eine Elektronenabsorption in anderer Weise dürfte eine andere Abhängigkeit von der Stromdichte ergeben als bei unedlen Gasen. Da aber leider bisher keine sauberen Beobachtungen hierüber vorliegen, soll eine weitere Diskussion dieses Falles hier aus bleiben.

## § 3. Theorie der Schichtung in der Glimmsäule.

Jetzt gehen wir zu dem Fall der geschichteten Säule über. Die Figur 1 $A$ möge schematisch ein Stück der ungeschichteten Säule darstellen. Die Pfeile deuten die Wege an, die einzelne Elektronen von einem Punkt, wo sie etwa gaskinetische Geschwindigkeit besaßen, nach einem Punkt, wo sie ionisieren, durchlaufen müssen. Diese Wege sind der Einfachheit halber gleich lang und gradlinig gezeichnet. Der Potentialfall muß auf einem solchen Wege $\alpha$ einen gewissen Wert $V$ besitzen. Auf das abgezeichnete Stück (Fig. 1 $A$) entfällt der Zeichnung nach der Potentialfall $\frac{1}{4}V$. Wir betrachten nun die Fig. 1 $B$. Dort sind die Elektronenwege in Reihen ausgerichtet, sonst aber ebenso zahlreich wie im Falle $A$. An den Stellen $b_1$ und $b_2$ wird teils direkt wegen der dortigen Dichtigkeit der ionisierenden Stöße, teils auch auf Grund des sich dort besonders ausbildenden $E$-Effekts die Ionisation bedeutend kräftiger sein als die Absorption, so daß oberhalb der Gebiete $b_1$ und $b_2$ recht viele Elektronen dem Stromvorgang zur Verfügung stehen. Dort wird also ein schwächeres Feld für den Strom nötig. Ein solches stellt sich auch ein, weil das Gebiet $c_1$ bzw. $c_2$ schnell von Elektronen gefüllt wird, die dort zum Teil

Energieaufwand in einen solchen Zustand versetzt werden kann, daß es sich im Sinne der Hypothese $E$ edler verhält als sonst, natürlich ohne Veränderung der Ionisationsspannung.

Bei der Formulierung der Hypothese $E$ wurde darauf Rücksicht genommen, daß die einzelnen Moleküle in einer Glimmstrombahn im Mittel so selten von Elektronen oder Ionen getroffen werden, daß eine besondere Wirkung durch das Aufeinanderfolgen der Treffer kaum zu erwarten ist. Es läßt sich z. B. leicht berechnen, daß bei 1 mm Druck und etwa 1 Milliampere/cm² jedes Molekül einer Luftfüllung im Mittel nur etwa 10 bis 20 Stöße pro Sekunde erleidet.

1) W. Matthies und H. Struck, Verh. d. Deutsch. phys. Gesellsch. **14**, 83, 1912.

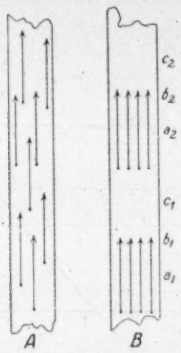



Fig. 1.

an Molekülen haften und als Ionenladungen eine negative Raumladung bilden, welche unter sich das Feld schwächt. Die Begegnung zwischen den Elektronen aus $b_1$ und den positiven Ionen aus $b_2$ dürfte wegen der verschiedenen Beweglichkeiten erst nahe unter $b_2$ stattfinden. Vor und hinter dieser Begegnungsstelle sind also solche Ladungen vorhanden, daß zwischen ihnen das Feld verstärkt wird. Dies geschieht gerade da, wo ein Teil der von unten kommenden Elektronen wieder größere Geschwindigkeiten erlangen muß, um den beschriebenen Vorgang in Gang zu halten. Wir sehen also, daß der Vorgang für sein Bestehen selbst sorgt. Es ist auch leicht zu zeigen, daß er dem Vorgang $A$ gegenüber stabil sein kann.

Für diese Stabilität ist nötig, daß im Falle $B$ eine kleinere Spannung auf das Strombahnstück fällt als im Falle $A$. Auf den Strecken $a_1$ und $a_2$, die in Wirklichkeit meistens kleiner als $a$ sein dürften, ist ein Spannungsfall $V_1$ nötig, der etwas größer als die Ionisationsspannung, aber, besonders wegen der Verminderung der Reibung der Elektronen durch den $E$-Effekt, kleiner als $V$ ist. Auf den Strecken $c_1$ und $c_2$ ist, wie schon hervorgehoben, der Potentialgradient $\mathfrak{E}$ kleiner als $\frac{V}{a}$. Der ganze Spannungsfall des Bahnstückes wird also im Falle $B$ gleich $2V_1 + 2c_1\mathfrak{E}$, eine Größe, die offenbar kleiner werden kann als $4V$. Dazu ist z. B. nur erforderlich, daß $c_1\mathfrak{E} < V$ ist. Günstig für die Stabilität wirkt natürlich das Herabdrücken des $V_1$ durch den $E$-Effekt[1]).

1) P. Neubert teilt (Ann. d. Phys. **42**, 1496, Kurventafel VI, 1913) einige Beobachtungen mit, welche meines Erachtens dahin gedeutet werden können, daß der mittlere Gradient in der positiven Säule etwas niedriger wird, sobald die Schichtung anfängt, als er nach für die ungeschichtete Säule geltenden extrapolierten Charakteristik sein würde. Neubert zieht allerdings durch die Bereiche seiner Beobachtungspunkte Kurven so, daß diese eine andere Auffassung stützen können. Ich glaube nicht, daß Neuberts Vergleiche zwischen dem Gradient in verschiedenen Teilen einer teilweise geschichteten Säule für seine Theorie beweiskräftig ist.

Jede Glimmsäule braucht, um ihr Feld aufrecht zu halten, gewisse Raumladungen, und diese können bei den vom Stromvorgang bedingten Potentialgradienten nur dann bestehen, wenn die Stromdichte nicht zu klein ist. Hieraus folgt, daß die Glimmsäule im kontinuierlichen Strom nur dann bestehen kann, wenn die Stromdichte eine gewisse Minimalstärke übersteigt. Die geschichtete Glimmsäule braucht größere Raumladungen als die ungeschichtete, allerdings bei anderen Potentialgradienten. Immerhin hat man vielleicht doch hierin einen Grund dafür zu suchen, daß die Säule nur über gewisse Stromdichtegrenzen Schichtung aufweist[1]). Im allgemeinen drängen sich die Schichten dichter zusammen bei steigendem Druck, und, wenn es sich um kleine Stromstärken handelt, werden gleichzeitig die Schichtpotentiale größer, und zwar dürften die beiden erwähnten Veränderungen eine Vergrößerung der Raumladungen verlangen, die nicht ohne Vergrößerung der Stromstärke zustande kommen kann[2]). Man wird also zu dem Schluß geführt, daß die untere Stromgrenze der Schichtung mit dem Druck im allgemeinen in die Höhe geht. Dies ist durch mehrere Versuche bestätigt worden[3]).

Es ist zu bemerken, daß die von mir angenommene Abhängigkeit der Schichtung von dem $E$-Effekt auch zur Bestimmung einer gewissen unteren Stromgrenze des Schichtgebiets führt, indem der $E$-Effekt wohl die nötige Stärke bei kleineren Stromdichten nicht erlangt.

Für die Ausbildung der Schichten ist ein Haftenbleiben der langsameren Elektronen an Molekülen notwendig, denn würde z. B. ein Teil der bei $b_1$ freigewordenen Elektronen nicht im $c_1$-Gebiet festgehalten, so gäbe es offenbar keinen Grund für jene Steigerung des Poten-

1) Bei Drucken von etwa 0,2 bis 1 mm ist, wie ich gefunden habe, die Minimalstromdichte der geschichteten Säule ziemlich gleich der „normalen" Stromdichte an der Kathode (vgl. Starks Artikel, § 61 in Winkelmanns Handbuch). Bei der Berechnung der Stromdichte wurde der wirkliche Durchmesser der Säule, nicht der etwas größere Durchmesser des Rohres berücksichtigt.

2) Man vergleiche diese Behauptung mit der in einem später erscheinenden Aufsatz ausgeführten Berechnung der Abhängigkeit der normalen Stromdichte an der Kathode vom Druck.

3) Vgl. z. B. bei R. Seeliger, Jahrbuch der Radioakt. 7, 539, 1910. Bei sehr großen Drucken und nicht zu engen Röhren dürfte wohl die Schichtung dadurch unmöglich werden, daß die nötigen Raumladungen bei zu kurzen Entfernungen untereinander unstabil werden.

tialgradienten im $a_2$-Gebiet, durch die die Schicht $b_2$ hervorgerufen und unterhalten wird. Wir erhalten somit eine Erklärung der von Gehlhoff[1]) gefundenen Tatsache, daß es in edlen Gasen, wo die langsamen Elektronen nach Franck und Hertz nicht kleben, keine Schichtung gibt.

Die hier gegebene Theorie steht offenbar im Einklang mit der von mehreren Forschern ausgesprochenen Vermutung, daß der leuchtende Teil einer positiven Schicht mit dem negativen Glimmlicht wesensähnlich sei, und daß vor diesem Teil eine negative Raumladung die Rolle einer Kathode spielt. Allerdings sind die Unterschiede zwischen dem negativen Glimmlicht und einer positiven Schicht nicht zu unterschätzen. Besonders mache ich darauf aufmerksam, daß der Anfang (von der Kathode gerechnet) einer Schicht eine Stelle ist, wo gewisse Elektronen gerade Lichterzeugungsgeschwindigkeit erreichen, während ein Stück weiter in die leuchtende Schicht hinein Elektronen mit etwas größeren Geschwindigkeiten Licht erzeugen. Der Anfang des negativen Glimmlichts bezeichnet einen ganz anderen Vorgang. Aus dem Gesagten geht hervor, daß von dem Anfang einer Schicht eine Farbe zu erwarten ist, die kleineren Geschwindigkeiten der lichterzeugenden Elektronen entspricht, als die Farbe der leuchtenden Schichtmitte. Die Farbenbeobachtungen von Gehrcke und Seeliger[2]) sowie auch einige Beobachtungen von mir (vgl. § 5) bestätigen dies.

Die hier vorgeführte Theorie gestattet eine einfache Erklärung der Schichtenpaare der positiven Glimmsäule. Ich bemerke zuerst, daß solche Schichtenpaare anscheinend nur in Gasgemischen auftreten. Verfasser hat besonders Schichtenpaare in wahrscheinlich mit Dämpfen, z. B. Fett-, Wasser- und Quecksilberdämpfen[3]), verunreinigtem Wasserstoff untersucht. Bei genügender Reinigung der Gasfüllung durch in flüssige Luft tauchende Kühlgefäße und durch Spülen mit durch geheizten Palladium diffundiertem Wasserstoff verschwinden die Doppelschichten. Sie treten außerdem nur innerhalb gewisser Druck- und Stromgrenzen auf, und zwar verschiebt sich das Schichtpaargebiet nach höheren Drucken und größeren Stromstärken, wenn der Reinheitsgrad des Wasserstoffs steigt. Ich fand einmal in einem 2 cm weiten Rohr das Schichtpaargebiet zwischen den Stromgrenzen 0,6 und 84 Milliampere und zwischen den Druckgrenzen 0,5 und 2,3 mm *Hg*. Durch Spülen des Rohres mit reinem Gas konnte ich die Grenzen kontinuierlich höher bringen. Zuletzt beobachtete ich die Stromgrenzen 70 bis 130 Milliampere und die Druckgrenzen 3,8 und 5 mm *Hg*. Nach nochmaligem Spülen erhielt ich keine Schichtpaare mehr. Meine in der Abhandlung R. H. ausgesprochene Vermutung, daß die Schichtpaare (oder Doppelschichten, wie ich sie dort nenne) in ganz reinem Wasserstoff nicht auftreten, hat sich also bestätigt.

Es ist wahrscheinlich, daß die Dampfmoleküle den Elektronen gegenüber sich unedler, klebriger verhalten als die Wasserstoffmoleküle. In einem Feld, das noch kein merkliches Hängenbleiben an Wasserstoffmolekülen gestattet, können also Elektronen doch an Dampfmolekülen haften. Es kann also an einer Stelle einer Wasserstoffglimmschicht, wo die allermeisten Elektronen, die nur $H_2$-Moleküle treffen, noch Geschwindigkeitsvergrößerungen erlangen und Ionisations- und Leuchterregungsfähigkeit erhalten können, derjenige Teil des Elektronenstroms, der auf Dampfmoleküle trifft, absorbiert werden, so daß sich innerhalb der leuchtenden $H_2$-Schicht eine Raumladungskathode ausbildet. Diese bringt ein solches Feld mit sich, daß nach ihr (nach der Anode hin) ein kleines Maximum der Ionisation und des Leuchtens zustande kommt. Eine für den Fall reinen Wasserstoffs einfache Schicht wird also durch den Dampf in zwei Halbschichten gespalten. Verschiedene Tatsachen sprechen für diese Erklärung, so z. B. die, daß ein Schichtpaar fast dieselbe Länge wie eine einfache Schicht in reinem Wasserstoff unter sonst gleichen Bedingungen hat, und daß die totale Doppelschichtspannung ungefähr gleich der einfachen Schichtspannung in reinem Wasserstoff unter sonst gleichen Bedingungen ist. Man vergleiche mit Bezug hierauf die Seite 30 und die Tabellen 1 und 2, sowie auch die Sondierungen *S* 8 und *S* 8' der Tabelle 10 meiner Abhandlung R. H. In jener Abhandlung habe ich allerdings eine von der hier ausgesprochenen etwas abweichende Ansicht vertreten.

Es ist endlich bemerkenswert, daß die von mir beobachtete Begrenzung des Strom- und Druckgebiets der Schichten sich theoretisch erklären läßt. Gewisse untere Grenzen des Partialdruckes des Dampfes und der Stromstärke sind offenbar dadurch bedingt, daß eine ge-

1) G. Gehlhoff, Verh. d. Deutsch. phys. Gesellsch. **14**, 960, 1912.

2) E. Gehrcke und R. Seeliger, Verh. d. Deutsch. phys. Gesellsch. **14**, 1025, 1028, 1912.

3) Oder mit Sauerstoff. Neulich publizierte nämlich Neubert (loc. cit.) mit den meinigen übereinstimmende Beobachtungen an Schichtenpaare, dessen Auftreten er auf die Wirkung von Sauerstoff zurückführt. Unrichtig ist allerdings die Neubertsche Ansicht, daß *Hg*-Dampf die Ausbildung der Schichtenpaare verhindert. Denn ich habe in Spektralaufnahmen von schönen Schichtenpaaren kräftige $H_\beta$-Spektra gefunden. Vgl. meine Abhandl. R. H. Seite 46.

wisse Anzahl Dampfionenbildungen pro Sekunde in einer Schicht nötig sind, wenn sich in dieser eine Dampfraumladungskathode ausbilden soll. Es kommt für die Schichtpaarbildung gewissermaßen auf das Produkt vom Dampfdruck und Stromstärke an, d. h. je kleiner der Dampfdruck ist, desto größer muß die Stromstärke sein, und je kleinere Prozentzahl Dampf der $H_2$ enthält, desto größer muß der Totaldruck sein, damit Schichtpaare entstehen. Damit ist die untere Stromstärke- bzw. Druckgrenze des Schichtpaargebiets erklärt. Die obere Druckgrenze beruht wahrscheinlich, jedenfalls zum Teil, darauf, daß der Dampf höchstens Sättigungsdruck annehmen kann, und daß bei sehr hohen Drucken des Gemisches das Verhältnis zwischen dem $H_2$- und dem Dampfdruck doch für die Schichtpaarbildung zu groß wird.

Neubert[1]) hat besonders wertvolle Vergleiche zwischen der „engen blauen" und der „weiten roten Schichtung" gemacht. Die enge Schichtung verlangt natürlich recht große Raumladungen und dürfte deshalb bei mäßigem Strom oder vielleicht überhaupt nur in durch Verunreinigung „klebrigem" Wasserstoff entstehen. Es ist wahrscheinlich, daß Elektronen, die zur Ionisation gelangen, im allgemeinen Zusammenstöße nur mit Wasserstoffmolekülen gehabt haben. Daraus folgt, daß im Falle enger Schichtung diese Elektronen einen kleineren Prozentsatz Energie auf ihrer Laufbahn vor einer Ionisation verlieren als im Falle weiter Schichtung, trotzdem diese in reinerem Gas vorkommt. Man kann also damit rechnen, daß ein Schichtpotential von annähernd derselben Größe wie die Ionisationsspannung am leichtesten in etwas verunreinigtem Gas bei „enger Schichtung" auftritt. Dies hat Neubert experimentell bestätigt, obwohl er seine Resultate anders deutet. Wenn diejenige Schichtung in $H_2$, bei der Wehner[2]) 5,69 Volt Schichtenpotential beobachtet hat, wirklich hauptsächlich $H_2$-Spektrum gezeigt hat, so ist wohl zu vermuten, daß sie eine Abart der Paarschichtung ist (vgl. R. H. Seite 31), wobei nur die halbe Ionisationsspannung auf jede Einzelschicht nötig ist, indem die Elektronen, welche aus einer gewissen Schicht stammen, erst in der zweitnächsten ionisieren.

1) P. Neubert, Ann. d. Phys. **42**, 1454, 1913.
2) F. Wehner, Ann. d. Phys. **32**, 82, 1910.

(Eingegangen 17. Januar 1914.)

## Elektrodenlose Ringentladung in Quecksilberdämpfen.

Vorläufige Mitteilung.

Von Joseph v. Kowalski.

Die Herren R. Wachsmuth und B. Winawer haben kürzlich eine sehr interessante Untersuchung über die elektrodenlose Ringentladung veröffentlicht[1]), in welcher sie wahrscheinlich machen, daß man, wie in den anderen Gasen, auch in Quecksilber zwei verschiedene Ionisierungsarbeiten annehmen darf.

Dies wird begründet durch die Arbeiten von Gehrcke und Seeliger[2]), welche für *Hg* zwei Grenzgeschwindigkeiten der Ionen finden, die auf zwei Energiestufen bei der Ionisierung von *Hg* deutlich hinweisen.

Auch werden die Arbeiten von Landau und Piwnikiewicz[3]) über Röntgenluminiszenz der Quecksilberdämpfe, sowie Arbeiten von E. Warburg[4]), E. Wiedemann und G. C. Schmidt[5]), J. Stark[6]), A. Kalähne[7]), J. Stark und Wendt[8]) über das kontinuierliche Spektrum des *Hg*-Dampfes zitiert.

Seit einer gewissen Zeit von anderen Gesichtspunkten aus mit der elektrodenlosen Entladung beschäftigt (dämpfende Wirkung derselben in elektrischen Schwingungskreisen), ist es mir gelungen zu zeigen, daß man auch bei der elektrodenlosen Ringentladung direkt die beiden Stufen der Ionisierungsenergie erhalten kann, und daß in der Tat derselben verschiedene Spektra entsprechen.

Die Versuche wurden auf folgende Art und Weise ausgeführt: In eine Quarzkugel ohne Elektroden von ca. 5 cm Durchmesser wurde eine kleine Menge von *Hg* hineingebracht, die Kugel wurde mit einer Gaedepumpe möglichst gut evakuiert, indem man während des Evakuierens das *Hg* mehrmals zum Sieden brachte, sodann wurde die Quarzkugel durch Abschmelzen von der Pumpe entfernt.

Setzt man so eine hochevakuierte Kugel in eine Spule eines elektrischen Schwingungskreises hinein, so leuchtet sie bei gewöhnlicher Temperatur nicht auf, erhöht man aber dieselbe bis auf ca. 60°, so leuchtet die Kugel stark auf.

1) R. Wachsmuth u. B. Winawer, Ann. d. Phys. **42**, 585, 1913.
2) Gehrcke u. Seeliger, Verh. d. Deutsch. Phys. Ges. **14**, 335, 1912.
3) Landau u. Piwnikiewicz, diese Zeitschr. **14**, 381, 1913.
4) E. Warburg, Wied. Ann. **40**, 1, 1890.
5) E. Wiedemann u. G. C. Schmidt, Wied. Ann. **57**, 454, 1896.
6) J. Stark, Ann. d. Phys. **16**, 490, 1905.
7) A. Kalähne, Wied. Ann. **65**, 815, 1898.
8) J. Stark u. G. Wendt, diese Zeitschr. **14**, 562, 1913.

Das Spektrum entspricht dann dem Spektrum, welches von R. Wachsmuth und B. Winawer der zweiten Ionisierungsstufe zugeschrieben worden ist. Eine genauere Untersuchung desselben ergibt, daß man außer dem *Hg*-Spektrum schwach auch das Wasserstoffspektrum (Hauptspektrum) beobachtet. Außerdem kommen aber noch stark neue, bisher unbekannte Linien zum Vorschein, so z. B. ein starkes Paar bei ca. 3064 und 3056 Å. Die genauen Resultate der Ausmessung werden an anderer Stelle demnächst veröffentlicht werden.

Läßt man die Entladung einige Minuten hindurchgehen, so erwärmt sich die Quarzkugel und die leuchtende Entladung setzt plötzlich aus, sorgen wir aber dafür, daß die Temperatur in der Kugel gleichmäßig und nur langsam ansteigt, indem man dieselbe in einem Luftbade erwärmt und nur kurze Zeit die Entladung schließt, so kann man die Temperatur bis auf ca. 120° steigen lassen, ohne daß die stark leuchtende Entladung aussetzt. Steigert man die Temperatur weiter, so bekommt man bei ca. 140° eine neue leuchtende Entladung, welche aber ein anderes Aussehen aufweist.

Die erste ist blendend weiß, die zweite smaragdgrün und bei weiterer Steigerung der Temperatur geht dieselbe in immer tieferes Grün über, um schließlich bei noch höherer Temperatur ganz auszusetzen.

Die spektrale Untersuchung zeigt ein kontinuierliches Band, welches von ca. 4300 Å. bis ca. 6500 Å. reicht und welches nur stark und scharf die grüne Hauptlinie 5460 Å. zeigt, also ein Spektrum, welches identisch mit dem von A. Kalähne l. c. S. 827 beschriebenen zu sein scheint. Kühlt man nun von hoher Temperatur an die Kugel ab, so zieht sich das kontinuierliche Band von rot gegen grün zurück und es treten allmählich auch die anderen Linien des *Hg*-Spektrums auf.

Aus diesen Daten ergibt sich, indem wir die Messungen von Ramsay und Young[1]) über die Sättigungsdrucke des Quecksilbers hinzuziehen, daß die erste Ionisierungsstufe desselben einem Drucke $p_I > 2$ mm (in der Bezeichnung von R. Wachsmuth), die zweite Ionisierungsstufe einem Drucke $p_{II} < 0{,}7$ mm entspricht.

Die Stellung, welche R. Wachsmuth im Vergleich zu anderen Gasen dem Quecksilber zuschreibt, scheint also richtig zu sein. Genauere Daten über die beiden Ionisierungsstufen des Quecksilbers hoffe ich demnächst mitteilen zu können.

Die beiden verschiedenen leuchtenden Erscheinungen im *Hg* lassen sich einem größeren Zuhörerkreise in sehr einfacher Weise demonstrieren. Dazu benutze ich eine kleine Quarzkugel von ca. 3 cm Durchmesser, mit einem Tropfen *Hg* gefüllt und ausgezeichnet evakuiert. Dieselbe wird vorsichtig mit einer Bunsenflamme erwärmt und mit der Hand kräftig geschüttelt. Bei mäßiger Erwärmung tritt dann infolge der Reibung des *Hg* an den Quarzwänden die bekannte weißliche Leuchterscheinung auf. Erwärmt man aber die Kugel stark, so beobachtet man ein prachtvolles smaragdgrünes Leuchten der Quarzkugel[1]). Noch schöner wird die Erscheinung, wenn man die Kugel auf eine Schwungmaschine montiert und unter Erwärmung in Rotation versetzt.

1) Ramsay u. Young, Chem. Soc. **49**, 37, 1886.

1) Derartige Quarzkugeln können vom Universitätsglasbläser K. Gundermann, Freiburg (Schweiz) bezogen werden.

Freiburg (Schweiz), Physikalisches Institut, Januar 1914.

(Eingegangen 26. Januar 1914.)

## Ein Einfadenelektrometer.

Von Theod. Wulf.

(Mit Tafel II.)

Das im folgenden beschriebene Elektrometer wurde bereits im Jahre 1909 von der Firma Günther & Tegetmeyer in Braunschweig angefertigt und gesetzlich geschützt. Die Beschreibung unterblieb damals in dem Glauben, daß angesichts der verschiedenen, fast gleichzeitig auftauchenden Instrumente vorerst kein Bedürfnis nach weiteren Modifikationen mehr vorliege. Inzwischen habe ich mich aber überzeugen müssen, daß das vorliegende Instrumentchen doch einige Aufgaben zu behandeln gestattet, welche die übrigen Instrumente entweder gar nicht oder doch nicht so gut zu lösen vermögen. Es wurde denn auch gelegentlich schon zu einigen Arbeiten benutzt, und in den Publikationen darüber erwähnt[1]). Deshalb sei hier eine kurze Beschreibung im Zusammenhang gestattet.

### Beschreibung des Instruments.

Das Instrument besteht in der Hauptsache aus einem Faden, der in einem aus zwei Schnei-

1) Bergwitz, diese Zeitschr. **13**, 28, 1912; Lukas, Observations faites . . . à l'occasion de l'éclipse de soleil du 17 avril 1912. Bruxelles, Bull. de Belg. 1912, p. 311—316; Wulf, Comparaison précise des horloges astronomiques à distance. Conférence internationale de l'heure, Paris 1912, p. 239—241; Elster u. Geitel, diese Zeitschr. **15**, 7, 1914; Guthnick, Astronom. Nachr. 4701, Dez. 1913, schrieb das Instrument irrtümlich Elster u. Geitel zu.

den gebildeten elektrischen Feld ausgespannt ist, genau wie bei den bekannten Instrumenten von Elster und Geitel und von Lutz-Edelmann. Durch verschiedenes Hilfspotential an den Schneiden, durch verschiedenen Abstand der Schneiden, verschiedene Spannung des Fadens, verschiedene Dicke des Fadens kann die Empfindlichkeit in sehr weiten Grenzen verändert werden.

Das einzig Eigentümliche an dem Instrument liegt in der Befestigung des unteren Fadenendes, welche zwischen der starren Befestigung einerseits und der vollständigen Bewegungsfreiheit andrerseits die Mitte hält, indem der Faden wie bei meinem Zweifadenelektrometer mittels eines elastischen Quarzfadenbügels gehalten wird. Daraus ergeben sich alle charakteristischen Eigenschaften des Instruments.

Fig. 1 zeigt die innere Einrichtung. $S_1$ und $S_2$ sind die beiden Schneiden, durch die Bernstein-

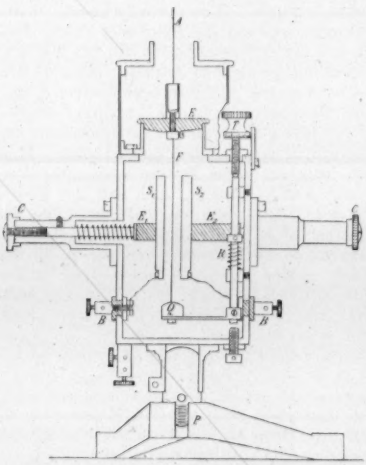


Fig. 1.

stückchen $E_1$ und $E_2$ isoliert, mittels der Schrauben $CC$ verschiebbar von fast vollständiger Berührung bis zu etwa 2 cm Entfernung von dem Faden, bei $BB$ können die Schneiden mit einer Elektrizitätsquelle verbunden werden (kleine Akkumulatoren, Normalelemente, Wasserbatterie, Trockensäule). Die obere Befestigung des Fadens $F$ wie auch die Ladevorrichtung sind ganz wie in dem Zweifadeninstrument; unten ist der Faden an der isolierenden Quarzfeder $Q$ befestigt, die Feder selbst wird von einem Hebelchen getragen, das mittels der Stange $R$ und der Schraube $T$ mit geteilter Trommel gehoben und gesenkt werden kann. Dadurch wird der Faden nach Belieben gespannt und gelockert. Wegen der zwischengeschalteten elastischen Feder erfolgt aber hier die Spannung des Fadens sehr langsam und gleichmäßig, man kann die Trommel $T$ mehrmals ganz herumdrehen, und es ist kaum möglich, den Faden durch zu starke Spannung zu zerreißen. Der Faden reißt meistens erst, nachdem der elastische Bügel fast zu einem Dreieck ausgestreckt ist (es wurden dazu Wollastonfäden bis zu 3 μ Durchmesser abwärts und ebenso dicke Quarzfäden benutzt). Durch einen Anschlag ist es unmöglich gemacht, den Faden so weit zu spannen.

Das Instrument ist ohne weiteres transportfähig und wegen der elastischen Fadenbefestigung auch den unsanftesten Stößen gewachsen. Nach dem Aufstellen erscheint der Faden sofort im Gesichtsfeld, wenn er vorher richtig eingestellt war. Der Ausschlag ist nur bei sehr lockerer Fadenspannung von der Neigung abhängig, bei mittleren und starken Spannungen ist die Fadeneinstellung so sicher, daß man das Instrument auch im Ballon wird gebrauchen können.

Die Höchstempfindlichkeit ist ungefähr dieselbe, wie bei dem Elster- und Geitelschen Instrument mit frei schwebendem Faden. Jedoch erstreckt sich dieselbe hier über einen merklich größeren Meßbereich, weil eben wegen der unteren Befestigung der Faden nicht so leicht labil wird. Auch kann man hier wohl ein stärkeres Objektiv verwenden, ohne fürchten zu müssen, daß der Faden an dasselbe anspringt.

Sind die Schneiden sehr genähert und der Faden sehr locker gespannt, so wird er natürlich auch labil; aber da zeigt sich ein neuer Vorzug der elastischen Fadenbefestigung, der Faden reißt beim Anspringen nicht. Um den Beginn des Labilwerdens zu studieren, habe ich bei dem ersten Instrument den Faden wohl hundertmal anspringen lassen, dabei ist er nie gerissen. Man brauchte auch, um ihn wieder frei zu machen, das Gehäuse nicht zu öffnen. Es genügte, den Faden scharf anzuziehen und die Schneiden zurückzuschrauben, dann erschien er stets bald wieder im Gesichtsfeld.

## Die Schaltungsweisen des Apparats.

Die Schaltungsweisen des Instruments sind dieselben, wie die vielfach beschriebenen bei

den anderen Einfadeninstrumenten, dieselben auch, wie beim Quadrantelektrometer. Sie sind so zahlreich, daß man meist aus einer größeren Zahl von Möglichkeiten wird auswählen können. Es seien deshalb im folgenden nur einige bemerkenswerte Angaben gemacht und im übrigen etwa auf die ausführlichere Beschreibung von Lutz[1]) verwiesen.

## I. Schaltungen ohne Hilfsspannung.

1. Der Faden wird mit einer Schneide verbunden, dann werden beide geladen. Die Fadenbewegung erfolgt durch Abstoßung (Abstoßschneide).

2. Der Faden allein wird geladen und einer geerdeten Schneide gegenübergestellt, die andere Schneide ist entfernt bzw. weiter zurückgeschraubt. Die Ablenkung erfolgt durch Anziehen an die durch Influenz geladene Schneide (Influenzschneide). Man kann auch umgekehrt verfahren und die eine Schneide laden, während der Faden mit der anderen Schneide geerdet ist. Die Schneide hat nur eine höhere Kapazität als der Faden.

3. Eine dritte Schaltung umfaßt beide vorhergehenden. Die eine Schneide ist mit dem Faden verbunden und stößt ihn als Abstoßschneide ab, während die andere Schneide geerdet ist und zugleich als Influenzschneide wirkt.

Bei der Abstoßschaltung wird der Abstand der wirksamen Teile mit dem Ausschlag größer, die Empfindlichkeit nimmt ab. Labilwerden des Fadens ist ausgeschlossen. Bei der Influenzschaltung wird der Abstand kleiner mit dem Ausschlag und die Empfindlichkeit wächst mit dem Ausschlag, bis schließlich die Stellung labil wird. Durch Vereinigung beider Schaltungen zu der dritten läßt sich bei geeigneter Wahl der Schneidenabstände erreichen, daß die Eichkurve über einen großen Bereich fast geradlinig läuft. Unter einem „großen Bereich" ist hier nicht nur ein großer Teil der Skala von 80 Strichen zu beiden Seiten des Nullpunktes verstanden, sondern man kann, am Ende der Skala angekommen, das Mikroskop verschieben, bis der Faden wieder auf Null steht und dann von neuem die ganze Skala durchlaufen und, wenn die Schneiden weit genug entfernt sind, kann dasselbe noch ein zweites und sogar ein drittes Mal geschehen. Man hat dann eine Skala mit unterdrücktem Nullpunkt. Diese Schaltung ist sehr wertvoll, wenn man etwa des Sättigungsstroms wegen ein bestimmtes Potential nicht unterschreiten darf, und doch in dem Arbeitsgebiet eine große Empfindlichkeit haben muß.

Fig. 2 enthält einige Eichkurven für den Gebrauch des Instruments ohne Hilfsladung.

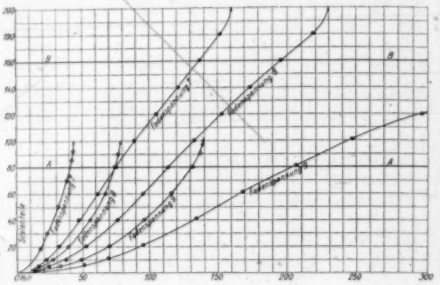


Fig. 2.

Die Kurven beziehen sich auf einen feinen Quarzfaden in der kombinierten Abstoß-Influenzschaltung. Die Abstoßschneide hatte stets einen Abstand von 2 mm vom Faden. Der Abstand der Influenzschneide war bei den drei Kurven mit geringelten Zeichen 3 mm, bei den drei anderen mit punktförmigen Zeichen 5 mm, beide Stellungen mit je drei Fadenspannungen, die sich jedesmal um eine ganze Umdrehung der Trommel $T$ voneinander unterschieden. Man sieht, daß alle diese Kurven vollständig ausgenutzt werden können, ohne daß der Faden labil wird. Alles, was unterhalb der Linie $AA$ liegt, gehört zu der ersten Mikroskopstellung. Dann wurde das Mikroskop verschoben, bis der Faden wieder bei Null stand. Bei 3 mm Schneidenabstand wurde der Faden nun bald labil. Das Labilwerden ist durch einen nach oben zeigenden Pfeil angedeutet. Bei 5 mm Schneidenabstand kann dagegen noch einmal die ganze Skala ausgenutzt werden, bis bei $BB$ noch einmal das Mikroskop verschoben wird. Will man einen noch weiteren Meßbereich, so muß man entweder die reine Abstoßschaltung anwenden oder die Influenzschneide noch weiter zurückziehen.

Man sieht an der ersten steilsten Kurve, daß das Instrument ohne Hilfsladung etwa vom Skalenteil 30 auf 80 gebracht wird durch eine Spannungszunahme von etwa 18 Volt, das ist im Mittel 2,8 Strich pro Volt. Für kleine Spannungen ist die idiostatische Schaltung stets unempfindlicher.

Für sehr hohe Potentiale eignet sich die reine Influenzschaltung am besten. Wenn man die Influenzschneide etwa 10 mm vom Faden entfernt, und den Faden mäßig anspannt, so

1) Lutz, diese Zeitschr. 9, 100, 1908 u. 13, 954, 1912.

wird er überhaupt nicht labil. Man kann dann so hohe Potentiale messen, bis der Faden auszustrahlen beginnt, was bei etwa 1200 Volt der Fall ist. Ein Zerreißen des Fadens ist auch bei diesen höchsten Spannungen nie eingetreten.

## II. Schaltungen mit Hilfsspannungen.

Mittels der Hilfsspannung kann ein doppelter Zweck erreicht werden.

1. Durch Anwendung eines starken elektrischen Feldes zwischen den Schneiden wird die Empfindlichkeit sehr gesteigert.

2. Der Ausschlag läßt auch das Vorzeichen des zu bestimmenden Potentials erkennen. Die Hilfsladung kann an dem Faden oder an den Schneiden liegen. Meist wurde sie an die Schneiden angelegt, damit der Faden mit seiner kleineren Kapazität für die zu messende Spannung frei bleibe.

Wenn man eine Potentialdifferenz an die Schneiden legt, so kann man die Feldstärke variieren entweder durch verschiedenes Potential oder durch die Entfernung der beiden Schneiden. Beide Methoden sind nicht ganz gleichwertig. Denn bei weiterer Entfernung der Schneiden hat man in der Mitte einen größeren Bereich mit fast homogenem Feld, während in der Nähe der Schneiden die Feldstärke rasch zunimmt. Wenn die Zunahme der elektrischen Kraft bei der Fadenverschiebung größer ist, als diejenige der zurücktreibenden mechanischen Kraft, so ist die Fadenstellung eine labile. Es ist deshalb besser, eine gewünschte hohe Empfindlichkeit durch höheres Hilfspotential als durch zu große Nähe der Schneiden zu erstreben.

Die Eichkurven sind bei den Schaltungen mit Fremderregung stets gerade Linien, bis daß der Faden den Schneiden sehr nahe kommt. Dann nimmt die Empfindlichkeit rasch zu. Einige Proben der Empfindlichkeit werden im folgenden noch gegeben werden.

### Die Fadenbewegung.

Bisher wurden die elektrostatischen Instrumente meist nur in der Ruhelage abgelesen. Das vorliegende dürfte außerdem besonders für die Registrierung schnell verlaufender Vorgänge geeignet sein, wobei die Fadenbewegung und ihre Dämpfung eine wichtige Rolle spielen.

Die Bewegung wird ausschließlich durch den Luftwiderstand gedämpft. Der Grad der Dämpfung hängt ab einmal von der Spannung der Seite und andrerseits von dem Fadenmaterial, nämlich dem Querschnitt und der Dichte des Fadens. Als Material kommen in Betracht massive Platinfäden (Dichte 21,5), versilberte oder metallbestäubte Quarzfäden (Dichte 2,2) und Spinnefäden ebenfalls mit Metallbestäubung (Dichte unbekannt, wohl nicht weit von 1,0). Da der Spinnefaden außerdem sehr fein ist, so wäre er das ideale Material, wenn er etwas haltbarer wäre. Sehr hohe Zugspannungen kann man aber diesem Material nicht geben, da sonst der Faden sich etwas streckt und die Metallbestäubung zerreißt. Bei den zulässigen Spannungen habe ich solche Fäden immer aperiodisch gedämpft gefunden. Für sehr schnell verlaufende Vorgänge dürfte daher dieses Material weniger geeignet sein, aber für die subjektive Ablesung, wie auch für die Registrierung von Vorgängen, die sich in etwa 0,1 sec und langsamer abspielen, ist der Spinnefaden auch für dieses Instrument wohl zu gebrauchen, um so mehr, da er wegen seiner Feinheit die höchste Empfindlichkeit zu erreichen gestattet.

Ähnlich verhalten sich die versilberten und bestäubten Quarzfäden, nur daß hier keine Gefahr besteht, die Bestäubung durch die Anspannung des Fadens zu zerstören. Dagegen kann die Bestäubung oder Versilberung wohl zerstört werden, wenn man den Faden längere Zeit schnelle Schwingungen ausführen läßt, z. B. wenn man ihn zum Registrieren der technischen Wechselströme verwendet[1]).

Für derartige Registrierungen ist das Instrument sehr gut zu gebrauchen, wenn man nur einen massiven Platinfaden verwendet. Die Bewegung dieser schweren Fäden ist viel schwerer aperiodisch gedämpft. Namentlich dickere Fäden von etwa 6 μ oszillieren auch bei recht schwachen Fadenspannungen; ein Platinfaden von 3 μ Durchmesser war bei geringeren und mittleren Spannungen aperiodisch. Die Fig. I—VI auf Tafel II geben einige Beispiele der Einstellung dieses Fadens aus der Gegend der aperiodischen Bewegung, die für den Gebrauch des Instruments als Registrierelektrometer vor allem in Frage käme. Durch Umlegen einer Wippe wurde eine am Voltmeter abgelesene Spannung an den Faden angelegt und gleich darauf von ihm getrennt, wodurch das Instrument von selbst an Erde gelegt war. Die mittlere Linie stammt von einem Jacquetschen Zeitschreiber, die einzelnen Abschnitte bedeuten 0,2 sec. Die Papierbewegung erfolgte mit einer Geschwindigkeit von ca. 3,7 cm pro sec. Es sei bemerkt, daß alle diese Kurven aufgenommen wurden, ohne das Elektrometer

1) Das kann auch ohne Absicht geschehen, wenn das Elektrometer mit einem Ladestift versehen in der Nähe einer solchen Wechselstromleitung steht. Dann wird es beständig durch Induktion geladen und macht alle Schwingungen mit. (Vgl. unten Tafel II, Kurve V.)

irgendwie gegen die elektrostatischen Störungen der Umgebung zu schützen. Bei Anwendung solcher Vorsichtsmaßregeln würde man wohl mit bedeutend größeren Empfindlichkeiten arbeiten können. Als Hilfsladung wurde in Ermangelung besserer Quellen eine Wasserbatterie von ca. 400 Volt benutzt, und durch Verschieben der Schneiden wurde die Empfindlichkeit variiert. Bei der ersten verzeichneten Kurve sieht man einen Ausschlag von ca. 9 mm für 0,18 Volt, was 0,02 Volt für einen Millimeter entsprechen würde. Hier ist deutlich eine Einstellungsdauer von etwa 0,3 sec zu bemerken.

Kurve II zeigt eine Einstellungsdauer von ca. 0,1 sec und eine Empfindlichkeit von 0,5 Volt pro mm.

Kurve III hat bei 0,05 sec Einstellungsdauer 0,04 Volt pro mm. Bei allen Kurven I—III überperiodische Dämpfung.

Kurve IV liegt nahe an der Grenze der aperiodischen Einstellung, welche sich in nahezu 0,01 sec vollzieht. Die Empfindlichkeit beträgt 0,12 Volt/mm.

Kurve V unterscheidet sich von IV nur dadurch, daß um die Ruhelage andauernd kleine Oszillationen gemacht werden. Sie entstanden durch Induktion von einem Wechselstrom von 50 Perioden und 127 Volt, der die Dunkellampe speiste, etwa 1,5 m vom Elektrometer entfernt. Bei größerer Annäherung der Lampe wuchsen diese Oszillationen stark an.

In Kurve VI sieht man deutlich oszillatorische Einstellung. Die Empfindlichkeit ist hier 0,45 Volt/mm. Die Zahl der ganzen Schwingungen beträgt ca. 60 pro sec.

Um wesentlich schnellere Schwingungen aufzeichnen zu können, muß man einen Registrierapparat verwenden, der eine schnellere Papierbewegung gestattet.

### Die Kapazität des Instruments.

Wo es auf kleine Kapazität ankommt, wird man nur den Faden selbst und nicht die Schneiden aufladen. Es kann das geschehen sowohl ohne Fremdladung in der Influenzschaltung für mittlere und hohe Potentiale, als auch mit einer Fremdladung an den Schneiden für kleine und hohe Potentiale. Die Kapazität des Fadens mit seinem Träger ist dann nur 2 cm, gemessen in Influenzschaltung bei einer Entfernung von 5 mm von der Influenzschneide. Bei großer Annäherung der Schneiden ist auch zu beachten, daß die Kapazität sich mit diesem Abstand ändern wird.

Diese außerordentlich zahlreichen Möglichkeiten, die Empfindlichkeit und die Schaltungsweisen zu ändern, machen es untunlich, das Instrument mit Eichung zu liefern.

Die Firma Günther & Tegetmeyer, Braunschweig, liefert das Instrument in zwei Ausführungen. Zuerst ein Instrument mit allen erwähnten Reguliermöglichkeiten. Da aber für viele Zwecke eine so weitgehende Mannigfaltigkeit eher stört als fördert, so wird auch ein einfacheres Instrument auf den Markt gebracht, bei welchem nur die Schneiden mikrometrisch verschiebbar sind, während der Faden in einer mittleren Empfindlichkeit (je nach dem Wunsch des Bestellers) unveränderlich gespannt ist. Beide Typen können mit Zeiß-Optik und einer mikrometrischen Ablesung des Abstandes der Schneiden von dem Faden versehen werden.

Einige Anwendungen des Instruments, besonders zum automatischen Registrieren schnell verlaufender Vorgänge, werden demnächst mitgeteilt werden.

### Zusammenfassung.

Es wird ein Einfadenelektrometer beschrieben, bei welchem durch elastische Anspannung des einen Fadenendes bedeutende Vorteile erzielt werden in bezug auf Empfindlichkeit, Meßbereich und namentlich in bezug auf Haltbarkeit des Fadens beim Transport wie beim Arbeiten.

Valkenburg, Holl.-L. Ignat-Colleg, Januar 1914.

(Eingegangen 31. Januar 1914.)

## Über den Einfluß der elektrostatischen Kapazität und der Mindestspannung der elektrolytischen Ventile auf ihr Verhalten gegen Wechselstrom.

(Mitteilung aus der Physikalisch-Technischen Reichsanstalt.)

Von Günther Schulze und R. Lindemann.

In dieser Zeitschrift hat Zenneck[1]) das Verhalten von Aluminiumventilzellen bei höheren Frequenzen bis zur Frequenz 10000 untersucht. Er schaltete eine einzelne Ventilzelle mit einem Hitzdraht- und Deprezstrommesser in Serie und maß das Verhältnis $i_g : i_f$, das heißt das Verhältnis des vom Gleichstrominstrument zu dem vom Wechselstrominstrument gemessenen Stromes. Er fand, daß dieses Verhältnis $i_g : i_f$ bei konstantem $i_f$ mit zunehmender Frequenz abnimmt und daß diese Zunahme bei der Frequenz 5000 schon sehr beträchtlich ist, daß

1) Diese Zeitschr. 14, 535, 1913.

man aber auch bei derartigen Frequenzen noch zu einem befriedigenden Verhältnis $i_r : i_f$ kommen kann, wenn man das Ventil mit hoher Stromdichte belastet.

Zenneck führt die Abnahme dieses Verhältnisses $i_r : i_f$ auf eine Zunahme der Durchlässigkeit des Ventils in der Sperrichtung zurück und will diese Abnahme in nicht näher angegebener Weise dadurch erklären, daß die Gleichrichterwirkung auf Diffusion beruhe und diese den schnellen Stromwechseln nicht mehr hinreichend zu folgen vermöge.

Nun hat bisher unseres Wissens noch niemand die Erscheinungen der elektrolytischen Ventilwirkung mit Hilfe der Diffusion zu erklären versucht. Dagegen hat der eine von uns auf Grund eingehender experimenteller Untersuchungen eine Hypothese aufgestellt[1]), wonach die Ventilwirkung auf Elektronenvorgängen in einer außerordentlich dünnen Gasschicht beruht, die sich bei der Formierung auf der Oberfläche des Ventilmetalls ausbildet. Aus dieser Hypothese folgt, daß die Undurchlässigkeit der Ventile in der Sperrichtung bis zu den Frequenzen der drahtlosen Telegraphie bestehen bleiben muß.

Im folgenden soll nun theoretisch und experimentell gezeigt werden, daß sich auf Grund obiger Folgerung die Resultate der Zenneckschen Untersuchung ergeben, wenn man nur zwei wesentliche Eigenschaften der Elektrolytventile berücksichtigt, die von Zenneck außer acht gelassen worden sind. Diese Eigenschaften sind die elektrostatische Kapazität und die Mindestspannung in der durchlässigen Richtung.

Die elektrostatische Kapazität der elektrolytischen Ventile ist durch die auf der Oberfläche der Ventilmetalle gebildete außerordentlich dünne wirksame Schicht verursacht, die bei Belastung des Ventils mit Wechselstrom in beiden Stromrichtungen in praktisch gleicher Stärke vorhanden ist, solange ein Elektrolyt verwandt wird, der vollständige Ventilwirkung (siehe weiter unten) erzeugt. Die elektrostatische Kapazität ist also für beide Stromrichtungen praktisch gleich. Da die Dicke der wirksamen Schicht der Formierungsspannung annähernd proportional wächst, so ist die elektrostatische Kapazität der letzteren annähernd umgekehrt proportional. Solange wässerige Lösungen und dasselbe Ventilmetall benutzt werden, ist sie vom Elektrolyten unabhängig. Die elektrostatische Kapazität einer bis 100 Volt formierten Aluminiumanode von 1 qdcm Oberfläche beträgt 65 Mikrofarad.

Die erwähnte, die Ventilwirkung bedingende wirksame Schicht ist nun nicht nur in der einen, der Sperrichtung, nahezu undurchlässig, sondern zunächst auch in der anderen, der Flußrichtung. Sie wird erst durchlässig, wenn eine bestimmte Spannung, die Mindestspannung, erreicht ist. Diese Mindestspannung, deren Verhalten der eine von uns untersucht hat[1]), steigt etwas mit der Formierungsspannung und der Verdünnung des Elektrolyten, ist jedoch wesentlich von dem Kation des Elektrolyten abhängig. Sie beträgt beispielsweise bei Aluminium in 0,2 normaler Lösung und nach Formierung bis 85 Volt für die Kationen

| | | |
|---|---|---|
| $H$ | etwa | 31 Volt, |
| $NH_4$ | „ | 14 „ , |
| $Na$ | „ | 7 „ . |

Sobald diese Mindestspannung erreicht ist, setzt der Strom der durchlässigen Richtung ein. Solange er fließt, ist die Spannung an der wirksamen Schicht merklich unabhängig vom Strom gleich der Mindestspannung. Die Spannung an der Zelle dagegen wird nach Erreichen der Mindestspannung mit dem Strom um so stärker steigen, je größer der der wirksamen Schicht vorgeschaltete Widerstand des Elektrolyten ist. Die Mindestspannung verursacht dann einen Knick in der Spannungskurve, der um so schwächer ist, je höher der Widerstand des Elektrolyten ist und dann leicht übersehen wird. Dieser Umstand in Verbindung mit den Störungen durch unvollständige Ventilwirkung haben bisher dazu geführt, ein elektrolytisches Ventil als eine Einrichtung zu betrachten, die in den beiden Stromrichtungen eines Wechselstroms verschieden konstante Widerstände besitzt.

Es kann nicht genug betont werden, daß diese Auffassung unzulässig ist. Alle elektrischen Ventile, der Quecksilbergleichrichter und das Wehneltventil so gut wie die elektrolytischen Ventile sind dadurch charakterisiert, daß der Strom in der durchlässigen Richtung erst nach Erreichen einer Mindestspannung einsetzt und daß die Spannung merklich unabhängig vom Strom gleich der Mindestspannung ist, solange der Strom fließt.

Zum Schlusse dieser Betrachtung sei noch auf die Erscheinung der unvollständigen Ventilwirkung[2]) hingewiesen.

Während das Aluminium bei vollständiger Ventilwirkung einen einmal erreichten Formierungszustand nach Verringerung oder Entfernung der Formierungsspannung sehr langsam wieder verliert, neigt es bei unvollständiger Ventilwirkung um so mehr zur schnellen Entformierung, je unvollständiger die Ventilwirkung ist.

1) Günther Schulze, Ann. d. Phys. (4) **22**, 543, 1907; (4) **28**, 787, 1909.

1) Günther Schulze, Ann. d. Phys. (4) **41**, 593, 1913.

2) Günther Schulze, Ann. d. Phys. (4) **34**, 699 ff., 1911.

Zenneck benutzte z. B. als Elektrolyten eine 5proz. Lösung von Ammoniumphosphat, die eine recht unvollständige Ventilwirkung erzeugt[1]). In der Tat tritt die Neigung zur Entformierung in der von Zenneck beobachteten Zacke der Stromkurve[2]) in der Mitte der undurchlässigen Richtung zutage. Bei Elektrolyten mit vollständiger Ventilwirkung fehlt diese Zacke, solange die Zelle nicht stark überlastet wird.

Nach den vorstehenden Überlegungen kann man ein elektrolytisches Ventil vollständig durch ein Quecksilbergleichrichterventil ersetzen, wenn man ihm nach Fig. 1a eine Kapazität $C$ parallel und einen Widerstand $r$ vorschaltet, deren Werte denen der elektrostatischen Kapazität und des

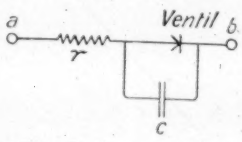



Fig. 1a.

Widerstandes des Elektrolyten des elektrolytischen Ventils gleich sind. Schaltet man nun diese Kombination nach Fig. 1b mit einem Vorschalt-

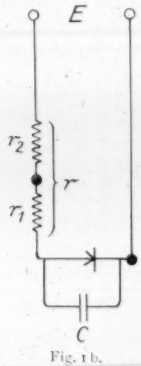



Fig. 1b.

widerstande $r_2$ an eine Wechselspannung $E$, so sieht man dann ohne weiteres, daß man $r_1$ und $r_2$ zu einem einzigen Widerstand $r$ vereinigen kann.

Die beiden Oszillogramme Fig. 2 und 3 mögen zur Bestätigung dienen. Fig. 2 ist die

1) l. c.
2) Siehe Fig. 14 seiner Arbeit.

Strom- und Spannungskurve einer elektrolytischen Gleichrichterzelle aus $Al—Na_2B_4O_7$ gesätt. $—Pt$.

Fig. 2.

Strom- und Spannungskurve einer mit 50periodigem Wechselstrom belasteten Ventilzelle aus Aluminium und Platin in gesättigter Boraxlösung. Die Wechselspannung betrug 65 Volt. Fig. 3 ist die Strom- und Spannungskurve der Kombi-

Strom- und Spannungskurve eines Quecksilbergleichrichters mit parallel geschalteter Kapazität und vorgeschaltetem Widerstand nach Fig. 1a.

Fig. 3.

nation Fig. 1a zwischen den Punkten $a$ und $b$. Die Kapazität war 8 Mikrofarad, der Widerstand $r_1 = 9{,}9\ \Omega$. Das Quecksilberventil wurde durch eine Anode und die Kathode eines Einphasenquecksilbergleichrichters gebildet, zwischen dessen anderer Anode und der Kathode ein Gleichstromhilfslichtbogen erzeugt war. Die Mindestspannung beträgt in diesem Falle etwa 18 Volt. Die beiden Oszillogramme gleichen sich fast vollkommen.

Man kann also ein elektrolytisches Ventil durch die Schaltung der Fig. 1 ersetzen. Das bietet zwei große experimentelle Vorteile. Erstens ermöglicht die Schaltung der Fig. 1 die Ströme im Kapazitätskreis und im Ventilkreis getrennt zu beobachten, was beim elektrolytischen Ventil unmöglich ist. Zweitens wird verhindert, daß eine Änderung der Strombelastung bei konstanter Betriebsspannung oder eine Änderung der Ventilspannung eine Änderung der übrigen die Gleichrichtung bedingenden Größen zur Folge hat. Denn bei einem elektrolytischen Ventil ändert sich mit der Ventilspannung die Dicke der wirksamen Schicht, ihre Kapazität und ihre Mindestspannung, und zwar schnell, wenn die Ventilspannung steigt, sehr langsam dagegen, wenn die Ventilspannung sinkt. Ferner ist die Änderung klein bei vollständiger, größer bei unvollständiger Ventilwirkung. Außerdem ändert sich der Widerstand des Elektrolyten mit der Belastung. Konstante Verhältnisse abzuwarten ist nicht möglich.

Die theoretische Behandlung der Erscheinungen wird erleichtert, wenn man sich zuvor mit Hilfe der Fig. 1 anschaulich macht, wie die Kapazität $C$ und die Mindestspannung $v_0$ auf das Verhältnis $\frac{i_g}{i_f}$ wirken. Wäre die Kapazität nicht vorhanden, so wäre die Spannung an der Zelle gleich der Betriebsspannung, solange die Zelle undurchlässig ist. Da nun aber der Kapazitätsstrom auch während der Undurchlässigkeit der Zelle fließt und im Widerstand $r$ einen Spannungsverlust erzeugt, so ist die Spannung an der Zelle um so kleiner, je größer der Kapazitätsstrom und je größer $r$ ist, um so später wird also auch die Mindestspannung erreicht. Das heißt, mit steigendem Kapazitätsstrome und steigendem $r$ wird $i_g$ auf einen immer geringeren Bruchteil der Periode beschränkt, während der Kapazitätsstrom einen immer größeren Teil der Periode einnimmt. Ganz entsprechend hat eine Steigerung der Mindestspannung eine Verkürzung der Dauer des Gleichstromes zur Folge. Wird endlich der durch den Kapazitätsstrom erzeugte Spannungsverlust in $r$ so groß, daß der Scheitelwert der Zellenspannung gerade die Mindestspannung erreicht, so wird $i_g$ gleich Null. $i_f$ ist jetzt reiner Kapazitätsstrom und hat den Wert

$$i_f = \frac{E}{\sqrt{r^2 + \left(\frac{1}{\omega C}\right)^2}}, \qquad (1)$$

wenn $E$ die Betriebsspannung, $\omega$ die Kreisfrequenz ist. Ferner gilt für diesen kritischen Punkt die Gleichung

$$r_0 = \frac{\sqrt{\frac{E^2}{v_0^2} - 1}}{\omega C}, \qquad (2)$$

wenn $v_0$ die Mindestspannung und $r_0$ der Widerstand ist, für den $i_g = 0$ wird. Die Gleichung (2) zeigt, daß $r_0$ umgekehrt proportional $\omega$, $C$ und nahezu auch $v_0$ ist. Die Bedingung für das Vorhandensein einer Gleichstromkomponente ist $r < r_0$. Je größer also bei gegebener Kapazität, Betriebsspannung und Mindestspannung die Frequenz ist, um so kleiner muß der Vorschaltwiderstand, um so größer also die Strombelastung der Zelle sein, wenn die Zelle noch Gleichstrom liefern soll. Man sieht, die Resultate Zennecks ergeben sich hier zunächst qualitativ ohne weiteres. Seine Vermutung, daß $\frac{i_g}{i_f}$ zugleich mit $i_f$ Null wird, bestätigt sich allerdings nicht.

Die genauere Theorie der Erscheinungen möge an Hand der Fig. 4, die nach Oszillographenaufnahmen gezeichnet ist, entwickelt werden. In Fig. 4 ist $E$ die Betriebsspannung, $V$ die Spannung an (Quecksilberventil parallel Kapazität), $i_c$ der Kapazitätsstrom, $i_g$ der Gleichstrom, $i_c'$ der Kapazitätsstrom, der fließen würde, wenn das Ventil nicht vorhanden wäre. Bei den Oszillographenaufnahmen war $E = 130$ Volt eff., $r = 500$ Ohm, $C = 12$ Mikrofarad, $n = 50$, $\frac{1}{\omega C} = 250$ Ohm, $v_0 = 18$ Volt.

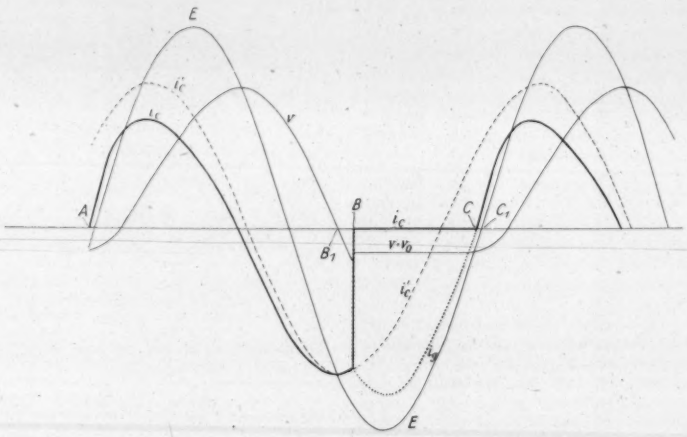



Fig. 4.

Die Kurven für $V$, $i_c$ und $i_g$ lassen deutlich die beiden, in jeder Periode des Wechselstroms wiederkehrenden Zeitabschnitte der Undurchlässigkeit $AB$ und der Durchlässigkeit $BC$ erkennen. Indem wir von einem unmittelbar nach dem Einschalten der Zelle sich vollziehenden Ausgleichungsvorgange absehen, sei der Punkt $A$ als der Anfangspunkt der Zeit gewählt. In diesem Moment habe die Betriebsspannung $E$ den Phasenwinkel $\alpha$, es sei also:

$$E = E_0 \sin(\omega t - \alpha).$$

Dem Punkte $B$ entspreche die Zeit $t_1$, im Punkt $C$ ist die erste volle Periode $\tau = \frac{2\pi}{\omega}$ verflossen.

Während der Zeit o bis $t_1$ fließt der Kapazitätsstrom $i_c$. Für ihn gilt die Gleichung:

$$i_c r + V = E_0 \sin(\omega t - \alpha), \qquad (3)$$

wenn $V$ die Spannung an dem Ventil zur Zeit $t$ bedeutet.

Die Beziehung

$$i_c = C \frac{dV}{dt},$$

in der $C$ wie oben die Kapazität des Ventils bezeichnet, liefert für $V$ die allgemeine Differentialgleichung

$$\frac{dV}{dt} + \frac{V}{rC} = \frac{E_0}{r \cdot C} \sin(\omega t - \alpha). \qquad (4)$$

Ihre Lösung ist unter Berücksichtigung der Bedingung: $V = -v_0$ für $t = o$:

$$\left.\begin{aligned} V &= E_0 \sin\varphi \cdot \cos(\omega t - \alpha - \varphi) - \\ &\quad - e^{-t \operatorname{tg}\varphi} \{E_0 \sin\varphi \cos(\alpha + \varphi) + v_0\}, \\ \operatorname{tg}\varphi &= -\frac{1}{r\omega C}. \end{aligned}\right| \qquad (5)$$

Zur Zeit $t = t_1$ wird das Ventil durchlässig, weil die Ventilspannung $V$ wiederum den Wert der Mindestspannung erreicht:

$$t = t_1; \quad V = -v_0.$$

Auf diesen Fall angewandt, liefert Gleichung (5) eine Bestimmungsgleichung für die Zeit $t_1$, die in der Form geschrieben sei:

$$\left.\begin{aligned} &\cos(\omega t_1 - \alpha - \varphi) - \cos(\alpha + \varphi) e^{-t_1 \operatorname{tg}\varphi} = \\ &\quad = -\frac{\sin\alpha}{\sin\varphi}(1 - e^{-t_1 \operatorname{tg}\varphi}). \end{aligned}\right| \qquad (6)$$

In der Zeit der Durchlässigkeit des Ventils $t_1 < t < \tau$ ist der Kapazitätsstrom $i_c$ wegen der Konstanz von $V = -v_0$ gleich Null. Da die Selbstinduktion im Schließungskreise neben $r$ zu vernachlässigen sein soll, gilt das Ohmsche Gesetz:

$$i_g \cdot r - v_0 = E_0 \sin(\omega t - \alpha). \qquad (7)$$

Zur Zeit $t = \tau$ ist offenbar $i_g = o$, also auch:

$$-v_0 = E_0 \sin(2\pi - \alpha).$$

Hieraus bestimmt sich der Phasenwinkel $\alpha$ im stationären Zustande; es ist

$$\sin\alpha = \frac{v_0}{E_0}. \qquad (8)$$

Die angegebenen Gleichungen gestatten ohne weiteres, die Werte des mit einem Hitzdrahtinstrument zu messenden quadratischen Mittelwertes des Stromes:

$$J_f^2 = \frac{1}{\tau} \int_0^\tau i^2 \, dt$$

und des mit einem Gleichstrominstrument meßbaren, durch das Ventil fließenden Gleichstromes

$$J_g = \frac{1}{\tau} \int_0^\tau i \, dt$$

zu berechnen.

Wegen der Kompliziertheit des für $J_f$ geltenden Wertes soll hier nur der Wert $J_g$ angegeben werden:

$$J_g = \frac{1}{\tau} \int_{t_1}^\tau i_g \, dt = \frac{E_0}{2\pi r} \{\cos(\omega t_1 - \alpha) - \cos\alpha\} + \frac{v_0}{r} \cdot \frac{\tau - t_1}{\tau}. \qquad (9)$$

Es sei hier noch besonders darauf hingewiesen, daß auch in dem Falle verschwindend kleiner Mindestspannung ($v_0 = o$) eine Verbreiterung des Gebietes der Undurchlässigkeit durch die Kapazität hervorgerufen wird; denn in diesem Falle rückt der Punkt $B$ nach $B_1$ und Punkt $C$ nach $C_1$ in Fig. 4. Die Dauer der Undurchlässigkeit ist also um den Betrag der Phasenverschiebung zwischen $V$ und $E$ vergrößert. Für den Grenzwert der Phasenverschiebung 90° beträgt die Dauer der Undurchlässigkeit $0{,}75 \cdot \tau$.

Zur Prüfung der Richtigkeit vorstehender

$r = 95$; 200; 300; 400; 500; 600 Ohm.

Fig. 5.

$r = 400$; 500; 600; 700; 800; 1000 Ohm (größte Empfindlichkeit).

Fig. 6.

Betriebsspannung $E$ und Strom $i_g$ im Quecksilberventil nach Schaltung Fig. 1. Kurze Zeitaufnahmen.

1) Die vorstehende mathematische Entwicklung ist gleichzeitig und unabhängig in etwas anderer Form auch durch Herrn Geh. Reg.-Rat Professor Dr. Jäger ausgeführt worden.

Entwicklungen möge zunächst die Gleichung (6) dienen. Aus ihr läßt sich die Dauer $t_1$ der Undurchlässigkeit der Kombination nach Fig. 1 als Funktion von $r$ bei gegebenem $C$ und $\omega$ ermitteln. Andererseits wurde diese Größe durch die Oszillographenaufnahmen Fig. 5 und 6 ermittelt. Diese Aufnahmen enthalten den Gleichstrom $i_g$ in dem Ventilkreise selbst bei verschiedenen Widerständen $r$. Außerdem findet sich auf ihnen die Betriebsspannung $E$, die 69 Volt effektiv betrug. Ferner war $C = 12{,}7$ Mikrofarad, $\omega = 314$.

Die folgende, nach Tabelle I gezeichnete Kurventafel (Fig. 7) enthält als ausgezogene Kurve

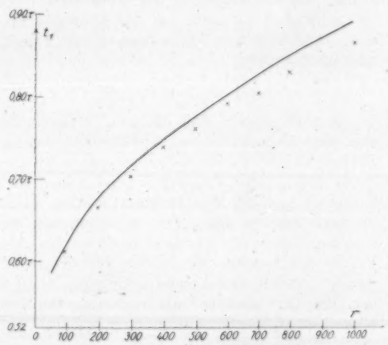



Fig. 7.

die aus Gleichung (6) mit Hilfe der Mindestspannung $v_0 = 18$ Volt berechnete Beziehung zwischen $t_1$ und $r$, während die eingezeichneten Punkte die aus den Oszillogrammen Fig. 5 und 6 folgenden Zeiten $t_1$ darstellen.

Die berechneten Werte sind hiernach durchweg etwas zu groß, und zwar im Mittel 2,0 Proz. Diese Abweichung dürfte innerhalb der Meßgenauigkeit liegen.

Die Tabelle I enthält die Zeiten $t_1$ auch als Funktion von $\operatorname{tg}\varphi = -\frac{1}{r\,\omega\,C}$. Sie gestattet somit auch in dem Falle, daß der Phasenwinkel auf andere Weise als hier, also durch Änderung

Tabelle I.

$E_0 = 98$ Volt, $v_0 = 18$ Volt.

| $r$ | $\operatorname{tg}\varphi$ | $\frac{t_1}{\tau}$ berechnet | $\frac{t_1}{\tau}$ gemessen |
|---|---|---|---|
| 95 Ohm | $-2{,}63$ | 0,62 | 0,61 |
| 195 „ | $-1{,}28$ | 0,68 | 0,67 |
| 395 „ | $-0{,}63_3$ | 0,75 | 0,74 |
| 995 „ | $-0{,}25_2$ | 0,89 | 0,87 |

der Kapazität $C$ oder der Frequenz ($\omega$), verändert wird, die zugehörige Dauer der Undurchlässigkeit des Ventils bei einer bestimmten Betriebs- und Mindestspannung zu ermitteln.

Ferner wurde mit Hilfe der Gleichung (2) für verschiedene $E$ und $C$ der Vorschaltwiderstand $r_0$ berechnet, für den $i_g = 0$ wird, und gleichzeitig durch Messung ermittelt. Die Ergebnisse finden sich in der folgenden

Tabelle II.

| $E$ Volt | $\frac{1}{\omega C}$ Ohm | $r_0$ berechnet Ohm | $r_0$ gemessen Ohm |
|---|---|---|---|
| 130 | 250 | 2560 | 2400 |
| 130 | 400 | 4050 | 4170 |
| 65 | 250 | 1264 | 1300 |
| 32 | 250 | 582 | 560 |

Eine weitere Stütze dafür, daß sich ein elektrolytisches Ventil ebenso verhält, wie die hier betrachtete Kombination, sind die Oszillogramme Fig. 8 und 9. Sie sind an einer Zelle aus Aluminium (85 qcm Oberfläche) und Platin in gesättigter Boraxlösung aufgenommen. Die Betriebsspannung war 130 Volt effektiv. Die elektrostatische Kapazität der Aluminiumelektrode

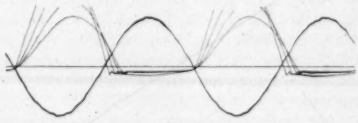


Fig. 8.

beträgt in diesem Falle 30 Mikrofarad, die Mindestspannung 10 Volt. Fig. 8 enthält die Betriebsspannung und die Spannung an der Zelle bei den Widerständen 1000, 600, 300 100 Ohm. Sie zeigt, wie mit zunehmendem Widerstande die Mindestspannung immer später erreicht, die Dauer der Undurchlässigkeit immer mehr vergrößert wird. Fig. 9 enthält die Be-

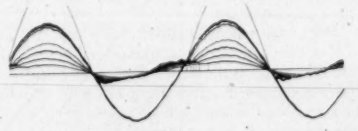


Fig. 9.

triebsspannung und den durch die Zelle fließenden Strom bei den Vorschaltwiderständen 1000, 600, 400, 300, 200, 100 Ohm. Auch hier sieht man, wie der Augenblick, in dem der Kapazitätsstrom in den Gleichstrom übergeht, mit zunehmendem Vorschaltwiderstande immer später eintritt.

Zum Schluß möge noch das Verhalten einer Aluminiumventilzelle bei höheren Frequenzen dargelegt werden. Es sei die wirksame Oberfläche des Aluminiums 1 qdcm, die effektive Wechselspannung 71 Volt (Scheitelspannung 100 Volt). Dann ist $C = 65$ Mikrofarad. Der Elektrolyt sei gesättigte Boraxlösung. Dann ist die Mindestspannung $a$ gleich 7 Volt. Für diese Werte enthält die folgende Tabelle III diejenigen Vorschaltwiderstände $r_0$ als Funktion der Frequenz, für die $i_g$ gerade Null wird, sowie die in diesem Augenblicke vorhandene Stromstärke $i_f$.

Tabelle III.

| Perioden sek | $r_0$ | $i_f$ |
|---|---|---|
| 50 | 703 Ohm | 0,1 Ampere |
| 500 | 70,3 „ | 1 „ |
| 5 000 | 7,03 „ | 10 „ |
| 50 000 | 0,703 „ | 100 „ |
| 500 000 | 0,0703 „ | 1000 „ |

Da nun in $r_0$ der Widerstand des Elektrolyten der Ventilzelle einbegriffen ist, und es kaum gelingen dürfte, diesen bei den vorliegenden Annahmen unter 0,7 Ohm zu verringern, so würde man schon bei der Frequenz 50000 ein solches Ventil ohne äußeren Vorschaltwiderstand unmittelbar an eine effektive Wechselspannung von 71 Volt legen können, ohne auch nur eine Spur von Gleichrichterwirkung zu erzielen.

Als mittlere Belastung einer gut gekühlten Aluminiumelektrode von 1 qdcm Oberfläche dürften etwa 10 Ampere anzunehmen sein. Man muß also, wie es ja Zenneck auch gefunden hat, schon bei der Frequenz 5000 eine elektrolytische Ventilzelle stark überanstrengen, wenn man noch eine Gleichrichterwirkung erzielen will.

Danach sind derartige Zellen für die Frequenzen der drahtlosen Telegraphie unbrauchbar. Will man hier noch einen elektrolytischen Gleichrichter benutzen, so muß man zunächst unter den zahllosen möglichen Kombinationen zwischen Ventilmetallen und Elektrolyten eine finden, bei der insbesondere die elektrostatische Kapazität viel geringer ist, als in den bisher bekannten Fällen. Eine Verringerung der Mindestspannung bei gegebener Kapazität hat nur geringen Einfluß. Versuche zur Aufklärung dieser Fragen sind im Gange.

### Zusammenfassung.

Es wird gezeigt, daß die von Zenneck beobachtete Abnahme der Gleichrichterwirkung elektrolytischer Ventilzellen mit steigender Frequenz sich auf die Wirkung der elektrostatischen Kapazität und der Mindestspannung dieser Ventile zurückführen läßt. Der experimentelle Beweis wird durch den Ersatz eines elektrolytischen Ventils durch einen Quecksilbergleichrichter mit parallel geschaltetem Kondensator erbracht. Die aus der theoretischen Durchrechnung des Problems sich ergebenden Gleichungen werden durch die Versuche bestätigt.

(Eingegangen 26. Januar 1914.)

# PHYSIKALISCHE TECHNIK.

## Hochvakuum-Meßapparat aus Glas.

Von Franz Ewald.

Verfasser konstruierte einen Hochvakuum-Meßapparat aus Glas nach Art des Mac Leodschen Manometers.

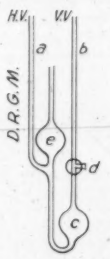
Wie aus nebenstehender Figur ersichtlich, wird $a$ mit dem Hochvakuum, $b$ mit der Vorvakuumpumpe verbunden. Durch Stellung des Dreiweghahnes $d$ kann die Luft nach $c$ strömen und wird dadurch das Steigen des Quecksilbers nach $a$ und $e$ veranlaßt.

Der Apparat zeichnet sich durch folgende Verbesserungen und Vorzüge aus:

1. Die gesamte Länge beträgt nur ca. 30 cm und ist der Apparat gegenüber allen anderen nur durch einfache Hahndrehung zu bedienen.

2. Das Quecksilber wird nur durch Glas geleitet und daher auch bei längerem Gebrauch nicht verunreinigt.

Der Apparat wird in allen Ausführungsformen, je nach Art seiner Verwendung, geliefert und ist nur von Franz Ewald, Kolozsvár, Ungarn, zu beziehen.




(Eingegangen 14. Januar 1914.)

# BESPRECHUNGEN.

**E. Gerland, Geschichte der Physik von den ältesten Zeiten bis zum Ausgange des achtzehnten Jahrhunderts.** Für die Drucklegung durchgesehen von H. v. Steinwehr. gr. 8. X u. 762 S. München u. Berlin, R. Oldenbourg. 1913. M. 17.—

Der vorliegende Band bildet ein wertvolles Vermächtnis des durch seine physikalisch-historischen Untersuchungen bekannten, 1910 verstorbenen Forschers Ernst Gerland. Es wird allen denen eine große Freude sein, die ein Interesse an den Naturwissenschaften überhaupt und daher auch an der Geschichte der Naturwissenschaften haben. Leider ist es dem Verfasser nicht vergönnt gewesen, das ganze Werk vollenden zu können; es liegt hier nur die 1. Abteilung bis Ende des 18. Jahrhunderts vor; ja er durfte nicht einmal die Fertigstellung dieses Bandes inkl. Drucklegung erleben. Daß Gerland mitten aus dieser Arbeit herausgerissen wurde, ist für die Mit- und Nachwelt deshalb besonders schmerzlich, als durch seinen Tod die Fortsetzung der Geschichte mit der Gerlandschen Gründlichkeit und der dazu notwendigen umfassenden historischen Kenntnis zunächst in Frage gestellt ist. Andrerseits müssen wir uns freuen, daß wenigstens die 1. Abteilung, die im Manuskript fertig vorlag, nach Gerlands Tode durch seinen Schwiegersohn H. v. Steinwehr herausgegeben werden konnte; bildet sie doch gerade den Teil der Geschichte der Physik, in dem das Quellenstudium am schwierigsten und umständlichsten ist und der infolgedessen am meisten ein ausgebildetes historisches Verständnis bei dem Verfasser erfordert, der doch andrerseits ein Physiker von Beruf sein muß.

Den größten Teil des Bandes nimmt natürlich die Physik der neueren Zeit in Anspruch, etwa 440 Seiten. Die Physik des Altertums umfaßt 130, die des Mittelalters ca. 160 Seiten. In der Darstellung tritt häufig, besonders in dem 3. Teil (Physik der neueren Zeit), die Persönlichkeit in den Vordergrund, die auf die Fortschritte auf physikalischem Gebiet bestimmenden Einfluß ausgeübt hat, wodurch einmal die Darstellung an Lebendigkeit gewinnt und ferner eine Reihe von Abschnitten des ganzen Bandes in sich abgeschlossene Monographien der betreffenden überragenden Persönlichkeiten und ihrer Zeit darstellt, so zum Beispiel die reizvollen Kapitel über Christian Huygens, über Hocke und Papin, über Newton und Leibniz. Bewundernswert ist die Knappheit, in der das gewaltige Material zusammengefaßt worden ist, die nicht durch trockenes Aneinanderreihen von Tatsachen erreicht wurde, sondern durch übersichtliches Hervorheben der Hauptpunkte und geschickte Gruppierung der weniger wichtigen Entdeckungen und Forschungsergebnisse. Die zahlreichen Literaturnachweise sind dabei natürlich von großem Wert. Abbildungen mußten gemäß den Bestimmungen des Werkes — es bildet das letzte Glied einer von der historischen Kommission der bayrischen Akademie herausgegebenen Sammlung „Geschichte der Wissenschaften in Deutschland" — vermieden werden. Das erschwerte stellenweise die Darstellung und wird zuweilen auch dem Leser etwas unbequem sein. Der physikalisch und mathematisch gebildete Leser wird den Mangel weniger empfinden, da seine Vorstellungskraft geschult ist, den anderen Lesern wird im Vorwort mit Recht empfohlen, die von Gerland und Traumüller verfaßte „Geschichte der physikalischen Experimentierkunst" zu Hilfe zu nehmen, die eine sehr große Anzahl (425) von Apparatabbildungen, zum großen Teil in Wiedergabe nach den Originalwerken enthält (Engelmann, Leipzig 1899).

Man wird H. v. Steinwehr allgemein Dank wissen, daß er sich der großen Mühe der Drucklegung dieses vortrefflichen Werkes unterzogen hat; es ist kein Zweifel, daß das Durcharbeiten des Manuskripts und die Drucklegung auf manche Schwierigkeiten führen mußte, „deren Beseitigung dem Verfasser selbst nur unbedeutende Mühe verursacht hätte, während sie für jeden anderen ein häufig zeitraubendes näheres Eingehen auf die behandelte Materie erforderten", wie H. v. Steinwehr im Vorwort sagt.

S. Valentiner.

**E. Rutherford, Radioaktive Substanzen und ihre Strahlungen.** (Handbuch der Radiologie, herausgegeben von E. Marx. Band II.) gr. 8. IX u. 642 S. mit 126 Textabbildungen und 1 Tafel. Leipzig, Akademische Verlagsgesellschaft m. b. H. 1914. M. 24.—, geb. M. 26.—

Der vorliegende zweite Band des „Handbuchs der Radiologie" ist eine von dem Herausgeber des Handbuchs, E. Marx, verfaßte Übersetzung des 1913 in englischer Sprache erschienenen Buches „Radioactive substances and their radiations" von Rutherford. In diesem, wie in der deutschen Übersetzung ist ein gedrängter Bericht über den gegenwärtigen Stand der Forschung gegeben, der nicht übertroffen werden kann. Die neue Darstellung ist an die Stelle der beiden Bücher „Radioactivity", 2. Aufl. Cambridge 1905, und „Radioactive transformations", New-York 1906, getreten, die beide, mit Zusätzen versehen, 1907 von Aschkinass und von Levin ins Deutsche übertragen worden sind. Auch im Rahmen des Handbuchs ist die vorliegende Übersetzung eine in sich abgeschlossene Monographie.

Der Referent kann unmöglich in diesem Falle der Gepflogenheit folgen, seine Besprechung dem Wert des Buches entsprechend auszudehnen, sondern muß sich damit begnügen, ganz kurz auf die hauptsächlichsten Unterschiede zwischen der alten „Radioaktivität" und dem neuen Buche hinzuweisen.

Die einleitenden Kapitel (Radioaktive Substanzen, Ionentheorie der Gase, Meßmethoden) sind selbstverständlich modernisiert, im übrigen aber relativ wenig verändert aus der früheren Monographie übernommen. Wenig geändert sind ferner die Abschnitte, in denen die auch heute noch allen radioaktiven Erscheinungen zugrunde liegende Zerfallstheorie auseinandergesetzt und entwickelt wird. Im übrigen ist so viel Neues in die Darstellung aufgenommen, daß ein vollkommen neues Werk entstanden ist. Schon in dem Abschnitt über die α-Strahlen findet sich nur noch verhältnismäßig wenig, was aus der alten „Radioaktivität" übernommen ist, entsprechend der großen Zahl von fundamentalen Arbeiten, die seit 1907 besonders von

Rutherford selber über den Gegenstand erschienen sind. Es sei nur an die Methoden der Zählung der α-Teilchen erinnert, ferner an die Bestimmung zahlreicher radioaktiver und Atom-Konstanten, die im Anschluß an die Zählung möglich geworden war (S. 103), sowie an den fundamentalen Versuch, durch den die Identität der α-Partikel mit dem *He*-Atom endgültig bewiesen wurde. Ganz neu sind die nun folgenden Abschnitte über δ- und über Rückstoß-Strahlen. Bei dem Bericht über die β-Strahlen ist die Darstellung der neueren Arbeiten über Streuung und Absorption, wie über die magnetischen Spektra der β-Strahlen in den Vordergrund getreten. Die Theorie des Zusammenhangs der β- und γ-Strahlen einer Substanz von Rutherford und die Arbeiten über die Struktur der γ-Strahlen sind neu aufgenommen, ferner die Rutherfordsche Theorie der Phosphoreszenz.

Zu erwähnen sind etwa noch die neueren Bestimmungen der physikalischen Eigenschaften der Emanationen, wie Kondensationstemperaturen, Volum, Dichte, Spektrum der *Ra*-Em. Die seit der letzten Ausgabe neu entdeckten Produkte und namentlich die Verzweigungen in den Reihen sind selbstverständlich aufgenommen. Die von Fajans und von v. Hevesy entdeckten Beziehungen zwischen den chemischen Eigenschaften der radioaktiven Stoffe und der Emission von α- und β-Partikeln, der Zusammenhang zwischen Transformationskonstante und Reichweite bei α-Strahlprodukten, die Rutherfordschen Anschauungen über den Ursprung der γ-Strahlen sind in einem „Allgemeine Resultate und Beziehungen" betitelten Kapitel behandelt; daselbst wird auch das Rutherfordsche Atommodell besprochen. In dem letzten Kapitel findet sich die reiche ältere und neuere Literatur über die Verteilung radioaktiver Materie in der Atmosphäre und in der Erde, sowie über kosmische Radioaktivität verarbeitet.

Drei Anhänge sowie ein Sachregister vervollständigen das Werk. In dem ersten Anhang sind die Methoden zur exakten Vergleichung von Radiummengen dargestellt, im zweiten die Methode von C. T. R. Wilson über die Sichtbarmachung einzelner α- und β-Teilchen. Der dritte Anhang enthält Tabellen von Zerfallskurven, eine Tabelle über die Abhängigkeit der Masse eines Elektrons von seiner Geschwindigkeit und eine Zusammenstellung der die Eigenschaften der bis jetzt bekannten radioaktiven Produkte charakterisierenden Daten.

Ich glaube, kein Leser wird das Buch aus der Hand legen, ohne die Kunst zu bewundern, die der Verfasser der Darstellung des so ungeheuer großen, von ihm selbst großenteils erschlossenen Gebiets hat angedeihen lassen. G. Rümelin.

**M. Centnerszwer, Das Radium und die Radioaktivität.** (Aus Natur und Geisteswelt. 405. Bändchen.) kl. 8. III u. 96 S. mit 33 Abbildungen. Leipzig und Berlin, B. G. Teubner. 1913. M. 1.—, gebunden M. 1.25

Das kleine Buch gibt in anschaulicher Weise einen Überblick über die wichtigsten Erscheinungen der Radioaktivität und die Gesetze, die den Ablauf dieser Erscheinungen beherrschen. Es zerfällt in 4 Hauptteile. Der erste behandelt die Entdeckung des Radiums, seine Herstellung aus der Pechblende sowie alle charakteristischen radioaktiven Wirkungen. Der zweite Teil befaßt sich mit dem Wesen der drei Strahlengruppen. Im dritten Teil werden die Gesetze des radioaktiven Zerfalls dargelegt und im Anschluß daran alle bekannten radioaktiven Substanzen in ihrer genetischen Abhängigkeit voneinander besprochen. Der vierte und letzte Abschnitt ist den Anwendungen des Radiums in der Heilkunde sowie seiner Bedeutung für den Wärmehaushalt der Erde gewidmet.

Das Buch bringt auf seinem beschränkten Raum alle wesentlichen Tatsachen in besonders leicht faßlicher Form. Demgegenüber fallen kleine Irrtümer wenig ins Gewicht. Einer derselben sei hier indes angeführt, weil er leicht verwirrend wirken kann. Der Verfasser bedient sich bei der Besprechung des aktiven Niederschlags des Thoriums der früheren Benennung und bezeichnet also mit Übergehung der neueren Resultate als *ThA* den β-strahlenden Körper von 10,6 Stunden Halbwertszeit. Wenige Seiten weiter aber bringt er eine Tabelle, in der als Thorium *A* das α-strahlende Zerfallsprodukt der Emanation von 0,2 Sek. Halbwertszeit angeführt erscheint. Warum der Verfasser außerdem in einem populären Werk gerade die etwas hypothesenreiche Tabelle von Swinne verwendet, ist auch nicht recht ersichtlich.

Das vorliegende Buch ist für einen großen Leserkreis bestimmt und wird diesem Zweck durch seine Anordnung und seine fast im Erzählerton gegebene Darstellung vollkommen gerecht. Alle an dem Gebiet Interessierten werden es daher mit Vergnügen und Nutzen lesen. Meitner.

---

**Leonardo Cassuto, Der kolloide Zustand der Materie.** Autorisierte deutsche Übersetzung von Johann Matula. gr. 8. 252 S. mit 18 Abbildungen. Dresden, Theodor Steinkopff. 1913. M. 7.50, gebunden M. 8.50

Die Verantwortung, die ein Verfasser eines Buches über Kolloide übernimmt, ist zurzeit besonders groß, weil sich das Gebiet in vollster Entwicklung befindet und es natürlich schwerer ist, aus der Tagesliteratur den Weizen von der übermäßig vielen Spreu zu sondern, als reine Frucht schmackhaft zu verwerten. Man kann die Schwierigkeit überwinden, wenn man sich an das Sachliche hält; und wenn der Schriftsteller zugleich Forscher oder gar ein Schöpfer seines Themas ist, so wird er auch den Zusammenhang des Sachlichen in kritischer und dauerhafter Weise darstellen, wie das in dem nicht genug zu empfehlenden Werke über Kolloidchemie von Zsigmondy geschehen ist. Die meisten der heutigen Schriften über Kolloide suchen im Gegensatze zu der Grundidee des Zsigmondyschen Werkes die Theorien des Tages in den Vordergrund zu stellen. Es ist sicherlich nichts dagegen zu sagen, wenn sich ein jeder für seinen Bedarf Arbeitshypothesen zurecht macht; auch ist es jedermanns persönliches Risiko, sie in unausgereifter Form der Öffentlichkeit preiszugeben. Am wenigsten ist dagegen einzuwenden, wenn ein Fachgenosse wie Cassuto, der Verfasser der vorliegenden Schrift, sich mit heißem Bemühen Klarheit über die verschiedenen Gedankengänge zu verschaffen sucht, die sich in der werdenden Wissenschaft durchkreuzen. Die Veröffentlichung der Früchte dieses Fleißes in Buchform kann aber für Leser, die dem Stoffe einstweilen noch einigermaßen fremd sind, verwirrend wirken. Der Laie nimmt die „Theorie", wenn sie als Regimentsmusik auftritt, für das Regiment, und es

diskreditiert das Heer bei den Nachbarstaaten, wenn sie nur das Musikkorps hören können. Gerade, weil der Physiolog, der Arzt, der Mineraloge, der Techniker heute den billigen Wunsch hat, etwas Gründliches über Kolloidchemie zu vernehmen, sollte sich der Schriftsteller besonders streng an das Sachliche halten, dessen Fülle überreichlich des Interessanten bietet; und gerade, weil manche Disziplin, deren Mitarbeit sehr erwünscht wäre, z. B. die synthetische organische Chemie sich teilweise sehr reserviert verhält, sollte alles vermieden werden, was die Kolloidchemie als Schauplatz einer Orgie von Hypothesen erscheinen lassen könnte.

Mit dem mehr oder minder glücklichen Bemühen des Cassutoschen Buches, allgemeine Gesichtspunkte der Kolloidchemie in den Vordergrund zu rücken und mit dem Verfahren, ein Drittel der Darstellung ausschließlich der „Theorie" zu widmen, kann sich der Referent also nicht befreunden. Doch möchte seine Kritik mehr die charakteristische Richtung treffen, als das lediglich symptomatische Buch. Bei der Lektüre der sachlichen Kapitel merkt man, daß das Buch von einem Physiker geschrieben ist; vieles diesem Näherliegende ist denn auch mit erfreulicher Klarheit dargeboten. Andere Abschnitte, wie z. B. der über den osmotischen Druck der Kolloide sind inhaltlich, jedenfalls zur Zeit des Erscheinens der Übersetzung bereits durch die Forschung überholt. Eine Überarbeitung des Stoffes bei dieser Gelegenheit wäre wünschenswert gewesen. W. Biltz.

---

**Sv. Odén, Der kolloide Schwefel.** (Nova acta regiae societatis scientiarum Upsaliensis. Ser. IV. Vol. 3. Nr. 4.) 4. 193 S. mit 22 Figuren. Upsala, Akademische Buchhandlung, A.-G. 1913.

Die vorliegende Monographie, das Resultat mehrjähriger experimenteller Untersuchungen, verdient nicht nur wegen des in ihr niedergelegten speziellen Tatsachenmaterials Beachtung, sondern bedeutet auch einen wertvollen Beitrag zur Kenntnis der Eigenschaften und Wandlungen der Kolloide im allgemeinen. Kolloidale Schwefellösungen (wie sie z. B. bei der Einwirkung von Schwefelwasserstoff auf Schwefeldioxyd oder bei der Zersetzung der aus ihren Salzen in Freiheit gesetzten Thioschwefelsäure entstehen) bieten der Kolloidforschung insofern ein besonders günstiges Arbeitsfeld, als sie sehr stabil sind und die Herstellung hoch konzentrierter Sole ermöglichen. Der Verfasser hat in Erkenntnis der Bedeutung, welche die Größe der Teilchen in kolloidalen Lösungen spielt, eine brauchbare Methode der „fraktionierten Koagulation" ausgearbeitet, mit deren Hilfe aus einem polydispersen Schwefelhydrosol Teilchen bestimmter Größe isoliert werden können. Auf diese Weise wurde es möglich, mit einem wohldefinierten Versuchsmaterial zu arbeiten und allgemeine Gesetzmäßigkeiten schärfer zu präzisieren. Von physikalisch-chemischen Eigenschaften der Hydrosole des Schwefels wurden folgende eingehend untersucht: das spezifische Gewicht und seine Abhängigkeit von der Konzentration, der thermische Ausdehnungskoeffizient (hier ergab sich das wichtige Resultat, daß die reversible Koagulation nicht mit einer Volumänderung verbunden ist), die innere Reibung und ihre Beeinflussung durch Konzentration, Temperatur und Teilchengröße, die Oberflächenspannung, das ultramikroskopische Verhalten, die Lichtbrechung usw. Von besonderem Interesse sind die Versuche über die reversiblen Zustandsänderungen kolloidaler Schwefellösungen. Da Schwefel ein negatives Kolloid ist, üben zugefügte Kationen eine koagulierende, Anionen eine lösende (dispergierende) Wirkung aus. Bei zunehmender Konzentration des zugesetzten Elektrolyts überwiegt schließlich die Wirkung der Kationen und es tritt Koagulation ein. Die Wirkung der Ionen läßt sich also nicht rein additiv und proportional den anwesenden Ionenmengen ausdrücken. Aus der Feststellung, daß bei der reversiblen Koagulation die Teilchenzahl in einem bestimmten Volumen konstant bleibt, wenn die Lösung koaguliert und das Koagulum wieder gelöst wird, ergeben sich interessante Folgerungen hinsichtlich des Mechanismus der Koagulation. Vor allem ist der Schluß zu ziehen, daß die Teilchen bei reversiblen Koagulationen auch im koagulierten Zustand ihren individuellen Charakter beibehalten. Bugge.

---

**Max Speter, Die chemische Verwandtschaft und ihre Beziehungen zu den übrigen Energieformen.** (Bücher der Naturwissenschaft, herausgegeben von Prof. Dr. Siegmund Günther. Bd. 17.) kl. 8. 134 S. mit 6 Abbildungen im Text und 4 Porträttafeln. Leipzig o. J., Philipp Reclam jun. M. —.40, gebunden M. —.80

Eine kurze, übersichtliche, klare und im wesentlichen einwandfreie Darstellung der Lehre von der chemischen Energie, deren Lektüre jüngeren Physikern und Chemikern empfohlen werden kann. Die Darlegungen über das Daniellsche Element sind infolge von sinnstörenden Schreib- und Druckfehlern unverständlich. Werner Mecklenburg.

---

## Berichtigungen.

In dem Artikel von K. Strecker:

### „Formel- und Einheitszeichen"

muß es auf S. 115, linke Spalte, Zeile 16 und 17 von unten statt „dcm²" und „dcm³" heißen „dm²" und „dm³".

---

In meiner Arbeit:

### „Bemerkungen zur Einsteinschen Gravitationstheorie"

im vorigen Heft dieser Zeitschrift sage ich auf S. 173: „Der Lauesche Satz ist nämlich auf die beiden Summanden des Energietensors $T^e_{\alpha\beta}$ und $T^g_{\alpha\beta}$ (sc. in welche Einstein den Energietensor zerlegt) einzeln anwendbar, weil im Innern eines vollständigen stationären Systems die beiden Komponenten des Energiestroms $T^e_{4\beta}$ und $T^g_{4\beta}$ einzeln verschwinden müssen". Dies ist unrichtig und nur durch eine Flüchtigkeit beim Niederschreiben des Artikels hineingekommen. Es sollte heißen: „Nach den Annahmen der Einsteinschen Theorie [vgl. Gl. (39) auf S. 122] gilt der Lauesche Satz schon für $T^e_{\alpha\alpha}$ allein. Diese Annahme will ich auch in meine Gravitationstheorie einfügen, dann ergibt sich (77)". Es müßte auch sonst auf S. 173 stets mit der Annahme: „$H_e = T^e_{11} + T^e_{22} + T^e_{33} + T^e_{44}$" zugleich die Annahme: „bei einem ruhenden Teilchen $T^e_{\alpha\alpha} = 0$, $\alpha \neq 4$" genannt werden. Gustav Mie.

(Eingegangen 20. Februar 1914.)

## Tagesereignisse.

**Adolf Salomonsohn-Stiftung.** Aus der Adolf Salomonsohn-Stiftung, welche den Zweck hat, Beihilfen zu gewähren behufs Förderung wichtiger Arbeiten auf den Gebieten der Naturwissenschaften (einschließlich Biologie und Medizin) durch hervorragend tüchtige Kräfte, denen für die längere Dauer der Forschung genügende Mittel nicht zur Verfügung stehen, sind stiftungsgemäß bis zu 2600 M. zur Verwendung verfügbar.

Bewerbungen sind bis zum 1. März 1914 schriftlich an den Ministerialdirektor Dr. Schmidt in Berlin, Wilhelmstraße 68 mit der Aufschrift Adolf Salomonsohn-Stiftungssache zu richten.

## Personalien.

(Die Herausgeber bitten die Herren Fachgenossen, der Redaktion von eintretenden Änderungen möglichst bald Mitteilung zu machen.)

**Habilitiert:** An der Technischen Hochschule Berlin Dr. Heinrich Faßbender für Elektrotechnische Meßkunde und drahtlose Telegraphie.

**Ernannt:** Dr. F. A. Carpenter zum a. o. Professor der Mathematik an der Universität Washington, Dozent Dr. H. Châtelet zum ord. Professor der Mechanik an der Universität Toulouse, Dr. Gambier zum ord. Professor der Mathematik an der Universität Rennes, Dr. R. Garnier zum Professor der Mathematik an der Universität Poitiers, Professor Henry L. Rietz von der Universität von Illinois in Urbana zum ord. Professor der Mathematik an derselben Universität, Professor Dr. S. E. Rose zum ord. Professor der Mathematik an der Ohio State Universität in Columbus, Dr. H. C. Zeis zum a. o. Professor der Mathematik an der Universität von Illinois in Urbana, der Vorstand des chemischen Laboratoriums an der Rudolf-Stiftung in Wien Dr. Ernst Freund zum a. o. Professor für angewandte medizinische Chemie an der Universität Wien, der Maître de Conférences an der Universität Lille Richard Fosse zum Professeur adjoint für organische Chemie an derselben Universität, Dr. John A. Wilkinson von der Ohio State University in Columbus zum Leiter der Abteilung für analytische Chemie an der Missouri State University in Columbia, der a. o. Professor an der Universität Berlin Dr. Robert Pschorr zum etatsmäßigen Professor und Vorsteher des organischen Laboratoriums an der Technischen Hochschule Berlin, Dr. E. E. Fournier d'Albe, Assistant Lecturer für Physik an der Universität Birmingham, zum Special Lecturer für Physik an der Pandschab-Universität Lahore (Indien).

**Berufen:** Der a. o. Professor an der Universität Leipzig Dr. Karl Schaum zum ord. Professor der physikalischen Chemie an der Universität Gießen, der Privatdozent an der Technischen Hochschule Karlsruhe Dr.-Ing. Hermann S. Hallo zum etatsmäßigen Professor für Elektrotechnik an der Technischen Hochschule Delft.

**Verliehen:** Dem Privatdozenten für anorganische Chemie an der Technischen Hochschule Berlin Dr. Siegfried Hilpert und dem ständigen Assistenten am anorganischen Laboratorium derselben Hochschule Dr. Max v. Unruh der Titel Professor.

**Rücktritt vom Lehramt:** Der Associate Professor der Mathematik an der Universität von California im Berkeley Dr. Albert W. Whitney (behufs Übernahme einer Stellung im staatlichen Versicherungsamt), der etatsmäßige Professor für anorganisch-chemische Technologie an der Technischen Hochschule Breslau Fritz Lüty.

**Gestorben:** Der emer. ord. Professor der allgemeinen und technischen Physik, insbesondere für Elektrotechnik an der Technischen Hochschule Wien Dr. Adalbert von Waltenhofen zu Eglofsheimb, der frühere Professor für Chemie am Presidency College in Madras W. Popplewell Bloxam in London.


## Angebote.

Zum möglichst sofortigen Eintritt **suchen** wir einen

**Spezial-Ingenieur oder Physiker für Hochfrequenztechnik.**

Herren mit mehrjähriger Praxis auf dem Gebiet der Wellentelegraphie werden bevorzugt.

Bewerbungen mit Lebenslauf, Zeugnisabschriften, sowie Angabe über Gehaltsansprüche und frühesten Eintrittstermin sind zu richten an

**Signal-Ges. m. b. H.**
**Kiel, Werk Ravensberg am Habsburgerring.**

## Gesuche.

**Physiker, Dr. phil.,**

mit mehrjähriger erfolgreicher wissenschaftlicher Tätigkeit an physikalischem Universitätsinstitut, **sucht** angemessene dauernde Stellung in größerem technischen Betriebe. Angebote unter **X 14** an die Expedition dieser Zeitschrift.

**Physiker oder Elektrotechniker**

mit langjähriger Erfahrung in der Fabrikation

**physikalischer Apparate**

**sucht** sich baldigst zu verändern. Nur leitende Stellung in größerer Fabrik, eines ähnlichen Industriezweiges, kommt in Frage. Suchender würde auch Neueinrichtung oder Reformierung eines vorhandenen Betriebes übernehmen. Es wollen sich auch Kapitalisten melden, die eventuelle Neugründung finanzieren würden. Angebote erbeten unter **S. H. 411** an die Expedition dieser Zeitschrift.


Für die Redaktion verantwortlich Dr. Hans Busch in Göttingen. — Verlag von S. Hirzel in Leipzig.
Druck von August Pries in Leipzig.

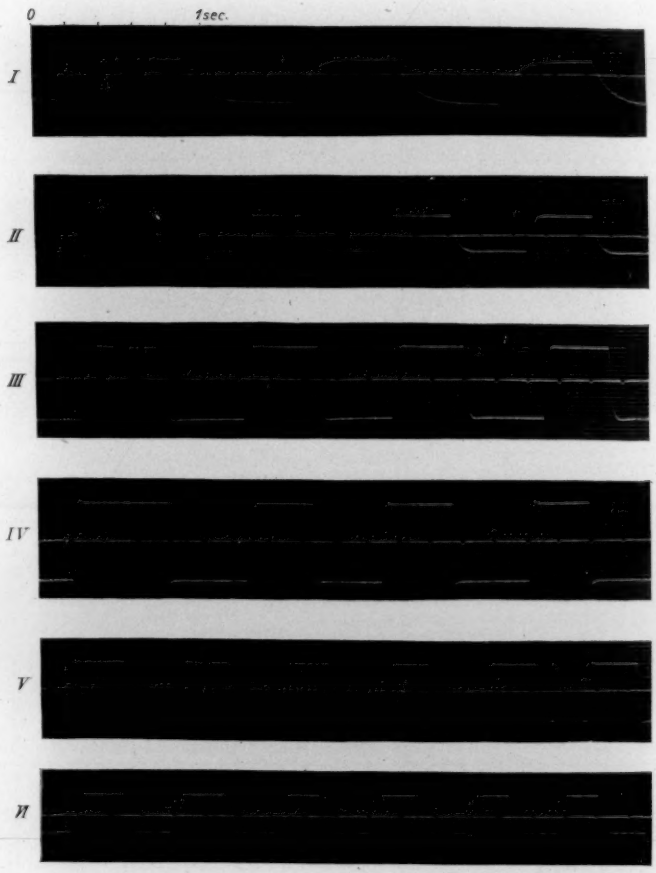



Fig. 3.